Práctico 3

Semántica de la Lógica Proposicional

Ejercicio 4 (Consecuencia semántica)

Bosquejo de solución

a. Para probar que se cumplen las siguientes consecuencias lógicas, usaremos Tableau Semánticos. Siguiendo las pautas del vídeo de presentación del práctico 3, si queremos probar que $\Gamma \models \varphi$, debemos construir un Tableau Semántico cuya raíz sea:

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}.\Gamma \\ \mathbf{F}.\varphi \end{array}$$

Si luego de desarrollado el resto del tableau llegamos a una contradicción en todas sus hojas, probamos que $\Gamma \models \varphi$.

I. **T)** $\varphi \models \varphi$
Demo)

Siguiendo las pautas planteadas antes, construimos el tableau:

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}.\varphi \ \times \\ \mathbf{F}.\varphi \ \times \end{array}$$

Como podemos observar, este es un tableau que tiene una unica hoja que a su vez es la raiz, y además presenta una contradicción. Por lo tanto probamos que $\varphi \models \varphi$.

II. **T)** $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$
Demo)

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}.\varphi \vee \psi \ * \\ \mathbf{T}.\neg\psi \\ \mathbf{F}.\varphi \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathbf{T}.\varphi \ \times \\ \mathbf{T}.\neg\psi \\ \mathbf{F}.\varphi \ \times \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{T}.\psi \\ \mathbf{T}.\neg\psi \ * \\ \mathbf{F}.\varphi \\ | \\ \mathbf{T}.\psi \ \times \\ \mathbf{F}.\psi \ \times \\ \mathbf{F}.\varphi \end{array} \end{array} \end{array}$$

Probamos que $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$.

III. **T)** $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

Demo)

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{T}.(\varphi \wedge \psi) \; * \\
\mathbf{T}.(\psi \wedge \sigma) \\
\mathbf{F}.(\varphi \wedge \sigma) \\
| \\
\mathbf{T}.\varphi \\
\mathbf{T}.\psi \\
\mathbf{T}.(\psi \wedge \sigma) \; * \\
\mathbf{F}.(\varphi \wedge \sigma) \\
| \\
\mathbf{T}.\varphi \\
\mathbf{T}.\psi \\
\mathbf{T}.\sigma \\
\mathbf{F}.(\varphi \wedge \sigma) \; * \\
\begin{array}{cc}
\mathbf{T}.\varphi \; \times & \mathbf{T}.\varphi \\
\mathbf{T}.\psi & \mathbf{T}.\psi \\
\mathbf{T}.\sigma & \mathbf{T}.\sigma \; \times \\
\mathbf{F}.\varphi \; \times & \mathbf{F}.\sigma \; \times
\end{array}
\end{array}
$$

Probamos que $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$.

b. I. **H)** $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \sigma$

T) $\varphi \models \sigma$

Demo)

Por un lado tenemos que:

$$
\begin{array}{l}
\text{(Por hipótesis)} \\
\varphi \models \psi \\
\Rightarrow \text{(Por def. } \models) \\
(\bar{\forall} v : Val)(v(\varphi) = 1 \Rightarrow v(\psi) = 1)\mathbf{(A)}
\end{array}
$$

Por otro lado:

$$
\begin{array}{l}
\text{(Por hipótesis)} \\
\psi \models \sigma \\
\Rightarrow \text{(Por def. } \models) \\
(\bar{\forall} v : Val)(v(\psi) = 1 \Rightarrow v(\sigma) = 1)\mathbf{(B)}
\end{array}
$$

Por lo tanto, a partir de **(A)** y **(B)**, dada v una valuación cualquiera que cumple $v(\varphi) = 1$, podemos afirmar que:

$$
\begin{array}{l}
\Rightarrow \text{(Por } \mathbf{(A)}) \\
v(\psi) = 1 \\
\Rightarrow \text{(Por } \mathbf{(B)}) \\
v(\sigma) = 1 \\
\Rightarrow (v \text{ valuación cualquiera que cumple } v(\varphi) = 1) \\
(\bar{\forall} v : Val)(v(\varphi) = 1 \Rightarrow v(\sigma) = 1) \\
\Rightarrow \text{(Por def. de } \models) \\
\varphi \models \sigma
\end{array}
$$

II. **H)** $\models \varphi \to \psi$
T) $\varphi \models \psi$
Demo)

Haremos esta demostración por absurdo. Suponemos que $\varphi \not\models \psi$

$$\varphi \not\models \psi$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición } \models)$$
$$(\bar{\exists} v_1 : Val)(v_1(\varphi) = 1 \text{ y } v_1(\psi) = 0)$$
$$\Rightarrow \text{(Aritmética)}$$
$$(\bar{\exists} v_1 : Val)(max\{1 - (v_1(\varphi), v_1(\psi)\} = 0)$$
$$\Rightarrow \text{(Def. valuación)}$$
$$v_1(\varphi \to \psi) = 0$$

Esto es absurdo ya que por hipótesis $\varphi \to \psi$ es tautología.
Por lo tanto, probamos que $\varphi \models \psi$

III. **H)** $\models \neg\varphi$ y $\psi \models \varphi$
T) $\models \neg\psi$
Demo)

Haremos esta demostración por absurdo. Suponemos que $\not\models \neg\psi$.
De nuestras hipótesis podemos concluir que:

$$\text{(por Hipótesis)}$$
$$\models (\neg\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición Tautología)}$$
$$(\bar{\forall} v : Val)v((\neg\varphi)) = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición Valuación)}$$
$$(\bar{\forall} v : Val)v(\varphi) = 0 \ \textbf{(A)}$$

Y por otro lado:

$$\text{(por Hipótesis)}$$
$$\psi \models \varphi$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición } \models)$$
$$(\bar{\forall} v : Val)(v(\psi) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1) \ \textbf{(B)}$$

Por lo tanto, partiendo de nuestra suposición, tenemos que:

$$\not\models \neg\psi$$
$$\Rightarrow \text{(Def. de } \models)$$
$$(\bar{\exists} v : Val)(v(\neg\psi) = 0)$$
$$\Rightarrow \text{(Def. de valuación)}$$
$$(\bar{\exists} v : Val)(v(\psi) = 1)$$
$$\Rightarrow \text{(Por } \textbf{(B)})$$
$$(\bar{\exists} v : Val)(v(\varphi) = 1)$$

Esto es absurdo ya que contradice lo afirmado en **(A)**.
Por lo tanto probamos que $\models \neg\psi$.

IV. **H)** $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$
T) $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$
Demo)

Por un lado, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Por hipótesis)}\\
&\Gamma \models \varphi\\
&\Rightarrow \text{(Por def. } \models)\\
&(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1)\textbf{(A)}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Por hipótesis)}\\
&\Gamma \models \neg\psi\\
&\Rightarrow \text{(Por def. } \models)\\
&(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\neg\psi) = 1)\\
&\Rightarrow \text{(Por def. valuación)}\\
&(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\psi) = 0)\textbf{(B)}
\end{aligned}
$$

Por definición de $\models$, queremos probar que:

$$(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\neg(\neg\varphi \vee \psi)) = 1)$$

Sea v una valuación cualquiera tal que $v(\Gamma) = 1$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&v(\neg(\neg\varphi \vee \psi))\\
&= \text{(Por def. valuación)}\\
&1 - v(\neg\varphi \vee \psi)\\
&= \text{(Por def. valuación)}\\
&1 - max\{v(\neg\varphi), v(\psi)\}\\
&= \text{(Por def. valuación)}\\
&1 - max\{1 - v(\varphi), v(\psi)\}\\
&= \text{(Por } \textbf{(A)} \text{ y } v(\Gamma) = 1)\\
&1 - max\{1 - 1, v(\psi)\}\\
&= \text{(Por } \textbf{(B)} \text{ y } v(\Gamma) = 1)\\
&1 - max\{0, 0\}\\
&= \text{(Def. de max)}\\
&1 - 0\\
&= \text{(Aritmética)}\\
&1
\end{aligned}
$$

Probamos que $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$.

Ejercicio 9 (Conectivas)

Bosquejo de solución

a. Recordemos que si C' es un conjunto de conectivos y C es un conjunto de conectivos funcionalmente completo

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_C)(\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{C'})\varphi\ eq\ \psi \Rightarrow C' \text{ es funcionalmente completo}$$

Tenemos que probar que los conjuntos $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son funcionalmente completos.

1. Queremos probar que el conjunto $\{|\}$ es funcionalmente completo, o lo que es lo mismo que dado C un conjunto funcionalmente completo de conectivos:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_C)(\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{|\}})\varphi\ eq\ \psi$$

Antes de comenzar la demostración se debe determinar C. Para esto vamos a considerar la tabla de definición del conectivo $|$, teniendo en cuenta que $v(\varphi|\psi) = 0$ sii $v(\varphi) = v(\psi) = 1$ con $\varphi, \psi \in \texttt{PROP}_C$.

φ	ψ	$\varphi\|\psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

φ	$\varphi\|\varphi$
0	1
1	0

En la tablas anteriores se puede observar que dada una valuación v cualquiera se cumple que:

- $v((\varphi|\psi)) = 1 - v((\varphi \wedge \psi)) = v((\neg(\varphi \wedge \psi)))$ **A**
- $v((\varphi|\varphi)) = v((\neg\varphi))$ **B**

.

De **A** y **B**, se puede expresar el conectivo $|$ en términos de los conectivos $\wedge$ y $\neg$ por lo que el conjunto funcionalmente completo de conectivos a utlizar va a ser $C = \{\wedge, \neg\}$ (se demostró en el teórico del curso que este conjunto de conectivos es funcionalmente completo).

Por el razonamiento anterior, lo que se quiere demostrar es:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_{\{\wedge,\neg\}})(\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{|\}})\varphi\ eq\ \psi$$

Demostración por PIP en $\texttt{PROP}_{\{\wedge,\neg\}}$.

Identificación de la propiedad: $P(\varphi) := (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{|\}})\varphi\ eq\ \psi$

Paso Base

T) $P(p_i) : (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{|\}})p_i\ eq\ \psi$

Demo.

Por definición de $\texttt{PROP}_{\{|\}}$, se cumple que $p_i \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$.
Además una fórmula siempre es equivalente a si misma por lo que $p_i\ eq\ p_i$.

Paso Inductivo 1

H) $P(\alpha) : (\bar{\exists}\alpha' \in \texttt{PROP}_{\{|\}})\alpha\ eq\ \alpha'$
$P(\beta) : (\bar{\exists}\beta' \in \texttt{PROP}_{\{|\}})\beta\ eq\ \beta'$

T) $P((\alpha \wedge \beta)) : (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{|\}})(\alpha \wedge \beta)\ eq\ \psi$

Demo.

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha\ eq\ \alpha'$ y $\beta\ eq\ \beta'$
$\Rightarrow$ (equivalencia de las partes)
$(\alpha \wedge \beta)\ eq\ (\alpha' \wedge \beta')(*^1)$
$\Rightarrow$ (lema 1)$(*^2)$
$(\alpha \wedge \beta)\ eq\ ((\alpha'|\beta')|(\alpha'|\beta'))$

$(*^1)(\alpha' \wedge \beta') \notin \texttt{PROP}_{\{|\}}$ porque ninguna fórmula de $\texttt{PROP}_{\{|\}}$ tiene al conectivo $\wedge$.
$(*^2)$ notar que el equivalente se desprende del razonamiento realizado al comienzo del ejercicio.
Resta probar $((\alpha'|\beta')|(\alpha'|\beta')) \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha' \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$ y $\beta' \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$
$\Rightarrow$ (Por regla inductiva de $\texttt{PROP}_{\{|\}}$)
$(\alpha'|\beta') \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$
$\Rightarrow$ (Por regla inductiva de $\texttt{PROP}_{\{|\}}$)
$((\alpha'|\beta')|(\alpha'|\beta')) \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$

Paso Inductivo 2

H) $P(\alpha) : (\bar{\exists}\alpha' \in \texttt{PROP}_{\{|\}})\alpha\ eq\ \alpha'$

T) $P((\neg\alpha)) : (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{|\}})(\neg\alpha)\ eq\ \psi$

Demo.

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha\ eq\ \alpha'$
$\Rightarrow$ (equivalencia de las partes)
$(\neg\alpha)\ eq\ (\neg\alpha')(*^1)$
$\Rightarrow$ (lema 2)$(*^2)$
$(\neg\alpha)\ eq\ (\alpha'|\alpha')$

$(*^1)(\neg\alpha') \notin \texttt{PROP}_{\{|\}}$ porque ninguna fórmula de $\texttt{PROP}_{\{|\}}$ tiene al conectivo $\neg$
$(*^2)$ notar que el equivalente se desprende del razonamiento realizado al comienzo del ejercicio.
Resta probar $(\alpha'|\alpha') \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha' \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$
$\Rightarrow$ (Por regla inductiva de $\texttt{PROP}_{\{|\}}$)
$(\alpha'|\alpha') \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$

Entonces por PIP para $\texttt{PROP}_{\{\wedge,\neg\}}$, $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_{\{\wedge,\neg\}})(\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{|\}})\varphi\ eq\ \psi$.

Lema 1

T) $(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP}_{\{|\}})(\bar{\forall}\beta \in \texttt{PROP}_{\{|\}})(\alpha \wedge \beta)\ \texttt{eq}\ ((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta))$

Demo.

Sean $\alpha \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$ y $\beta \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$ arbitrarios.
Hay que probar $(\alpha \wedge \beta)\ eq\ ((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta))$

$$(\alpha \wedge \beta)\ eq\ ((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta))$$
$$\Leftrightarrow_{\text{(def. de } eq)}$$
$$(\bar{\forall} v : Val) v((\alpha \wedge \beta)) = v(((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta)))$$

Sea v una valuación arbitraria, queremos probar $v((\alpha \wedge \beta)) = v(((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta)))$

$$v((\alpha \wedge \beta)) = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{(definición de valuación para } \wedge)$$
$$v(\alpha) = v(\beta) = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{(definición de valuación para } |)$$
$$v((\alpha|\beta)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \text{(definición de valuación para } |)$$
$$v(((\alpha|\beta)|(\alpha|\beta))) = 1$$

Lema 2

T) $(\bar{\forall} \alpha \in \texttt{PROP}_{\{|\}})(\neg \alpha)\ eq\ (\alpha|\alpha)$

Demo.

Sean $\alpha \in \texttt{PROP}_{\{|\}}$ arbitrario.
Hay que probar $(\neg \alpha)\ eq\ (\alpha|\alpha)$

$$(\neg \alpha)\ eq\ (\alpha|\alpha)$$
$$\Leftrightarrow_{\text{(def. de } eq)}$$
$$(\bar{\forall} v : Val) v((\neg \alpha)) = v((\alpha|\alpha))$$

Sea v una valuación arbitraria, queremos probar $v((\neg \alpha)) = v((\alpha|\alpha))$

$$v((\neg \alpha)) = 1$$
$$\Leftrightarrow \text{(definición de valuación para } \neg)$$
$$v(\alpha) = 0$$
$$\Leftrightarrow \text{(definición de valuación para } |)$$
$$v((\alpha|\alpha)) = 1$$

2. Queremos probar que el conjunto $\{\downarrow\}$ es funcionalmente completo, o lo que es lo mismo que dado C un conjunto funcionalmente completo de conectivos:

$$(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{PROP}_C)(\bar{\exists} \psi \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}) \varphi\ eq\ \psi$$

Antes de comenzar la demostración se debe determinar C. Para esto vamos a considerar la tabla de definición del conectivo $\downarrow$, teniendo en cuenta que $v(\varphi \downarrow \psi) = 1$ sii $v(\varphi) = v(\psi) = 0$, con $\varphi, \psi \in \texttt{PROP}_C$.

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

φ	$\varphi \downarrow \varphi$
0	1
1	0

En la tablas anteriores se puede observar que dada una valuación v cualquiera se cumple que:

- $v((\varphi \downarrow \psi)) = 1 - v((\varphi \vee \psi)) = v((\neg(\varphi \vee \psi)))$ **A**
- $v((\varphi \downarrow \varphi)) = v((\neg \varphi))$ **B**

.

De **A** y **B**, se puede expresar el conectivo $\downarrow$ en términos de los conectivos $\vee$ y $\neg$ por lo que el conjunto funcionalmente completo de conectivos a utlizar va a ser $C = \{\vee, \neg\}$ (se demostró en el teórico del curso que este conjunto de conectivos es funcionalmente completo).

Por el razonamiento anterior, lo que se quiere demostrar es:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_{\{\vee,\neg\}})(\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})\varphi \ eq \ \psi$$

Demostración por PIP en $\texttt{PROP}_{\{\vee,\neg\}}$.

Identificación de la propiedad: $P(\varphi) := (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})\varphi \ eq \ \psi$

Paso Base

T) $P(p_i) : (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})p_i \ eq \ \psi$

Demo.

Por definición de $\texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$, se cumple que $p_i \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$.
Además una fórmula siempre es equivalente a si misma por lo que $p_i \ eq \ p_i$.

Paso Inductivo 1

H) $P(\alpha) : (\bar{\exists}\alpha' \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})\alpha \ eq \ \alpha'$
$P(\beta) : (\bar{\exists}\beta' \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})\beta \ eq \ \beta'$

T) $P((\alpha \vee \beta)) : (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})(\alpha \vee \beta) \ eq \ \psi$

Demo.

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha \ eq \ \alpha'$ y $\beta \ eq \ \beta'$
$\Rightarrow$ (equivalencia de las partes)
$(\alpha \vee \beta) \ eq \ (\alpha' \vee \beta')(*^1)$
$\Rightarrow$ (lema 3)$(*^2)$
$(\alpha \vee \beta) \ eq \ ((\alpha' \downarrow \beta') \downarrow (\alpha' \downarrow \beta'))$

$(*^1)(\alpha' \vee \beta') \notin \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ porque ninguna fórmula de $\texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ tiene al conectivo $\vee$.
$(*^2)$ notar que el equivalente se desprende del razonamiento realizado al comienzo del ejercicio.
Resta probar $((\alpha' \downarrow \beta') \downarrow (\alpha' \downarrow \beta')) \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha' \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ y $\beta' \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$
$\Rightarrow$ (Por regla inductiva de $\texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$)
$(\alpha' \downarrow \beta') \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$
$\Rightarrow$ (Por regla inductiva de $\texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$)
$((\alpha' \downarrow \beta') \downarrow (\alpha' \downarrow \beta')) \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}}$

Paso Inductivo 2

H) $P(\alpha) : (\bar{\exists}\alpha' \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})\alpha \ eq \ \alpha'$

T) $P((\neg\alpha)) : (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP}_{\{\downarrow\}})(\neg\alpha) \ eq \ \psi$

Demo.

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha \ eq \ \alpha'$
$\Rightarrow$ (equivalencia de las partes)
$(\neg\alpha) \ eq \ (\neg\alpha')(*^1)$
$\Rightarrow$ (lema 4)$(*^2)$
$(\neg\alpha) \ eq \ (\alpha' \downarrow \alpha')$

$(*^1)(\neg\alpha') \notin \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ porque ninguna fórmula de $\mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ tiene al conectivo $\neg$

$(*^2)$ notar que el equivalente se desprende del razonamiento realizado al comienzo del ejercicio.

Resta probar $(\alpha' \downarrow \alpha') \in \mathtt{PROP}_{\{|\}}$

(Por hipótesis inductiva)
$\alpha' \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$
$\Rightarrow$ (Por regla inductiva de $\mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$)
$(\alpha' \downarrow \alpha') \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$

Entonces por PIP para $\mathtt{PROP}_{\{\vee,\neg\}}$, $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP}_{\{\vee,\neg\}})(\bar{\exists}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}})\varphi\ eq\ \psi$.

Lema 3

T) $(\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}})(\bar{\forall}\beta \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}})(\alpha \vee \beta)\ \mathtt{eq}\ ((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta))$

Demo.

Sean $\alpha \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ y $\beta \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ arbitrarios.

Hay que probar $(\alpha \vee \beta)\ eq\ ((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta))$

$(\alpha \vee \beta)\ eq\ ((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta))$
$\Leftrightarrow_{\text{(def. de } eq)}$
$(\bar{\forall}v : Val)v((\alpha \vee \beta)) = v(((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta)))$

Sea v una valuación arbitraria, queremos probar;

$$v((\alpha \vee \beta)) = v(((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta)))$$

$v((\alpha \vee \beta)) = 0$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuación para $\vee$)
$v(\alpha) = v(\beta) = 0$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuación para $\downarrow$)
$v((\alpha \downarrow \beta)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuación para $\downarrow$)
$v(((\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta))) = 0$

Lema 4

T) $(\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}})(\neg\alpha)\ eq\ (\alpha \downarrow \alpha)$

Demo.

Sea $\alpha \in \mathtt{PROP}_{\{\downarrow\}}$ arbitrario.

Hay que probar $(\neg\alpha)\ eq\ (\alpha \downarrow \alpha)$

$(\neg\alpha)\ eq\ (\alpha \downarrow \alpha)$
$\Leftrightarrow_{\text{(def. de } eq)}$
$(\bar{\forall}v : Val)v((\neg\alpha)) = v((\alpha \downarrow \alpha))$

Sea v una valuación arbitraria, queremos probar $v((\neg\alpha)) = v((\alpha \downarrow \alpha))$

$v((\neg\alpha)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuación para $\neg$)
$v(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuación para $\downarrow$)
$v((\alpha \downarrow \alpha)) = 1$

b.

Sea v una valuación tal que $v(\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (condición de \$)
$v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 1$ o $v(\varphi_1) = v(\varphi_3) = 1$ o $v(\varphi_2) = v(\varphi_3) = 1$
$\Leftrightarrow$ (definición valuación para $\wedge$ y $\vee$)
$v((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (v arbitraria)
$(\bar{\forall} v : Val) v(\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = v((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$
$\Leftrightarrow$ (definición de equivalentes)
$\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\ eq\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$
$\Leftrightarrow$ (De Morgan y Teo. Sustitución)
$\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\ eq\ (\neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)) \vee (\neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_3)) \vee (\neg(\neg\varphi_2 \vee \neg\varphi_3))$

c.

Sea v una valuación tal que $v(\varphi_1 \# \varphi_2) = 1$
$\Leftrightarrow$ (condición de #)
$(v(\varphi_1) = 1$ y $(\varphi_2) = 0)$ o $(v(\varphi_1) = 0$ y $v(\varphi_2) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (definición valuación para $\wedge$ y $\vee$)
$v((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = 1$
$\Leftrightarrow$ (v arbitraria)
$(\bar{\forall} v : Val) v(\varphi_1 \# \varphi_2) = v((\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2))$
$\Leftrightarrow$ (definición de equivalentes)
$v(\varphi_1 \# \varphi_2)\ eq\ (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
$\Leftrightarrow$ (De Morgan y Teo. Sustitución)
$\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\ eq\ (\neg(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)) \vee (\neg(\varphi_1 \vee \neg\varphi_2))$

d. Queremos probar que el conjunto $\{\wedge, \bot\}$ no es funcionalmente completo.
Recordemos de la parte a):

$$(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP})(\bar{\exists}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})\varphi\ eq\ \psi \Rightarrow \{\wedge, \bot\} \text{ es funcionalmente completo}$$

Se quiere probar entonces, $(\bar{\exists}\varphi \in \mathtt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})$ no se cumple $(\varphi\ eq\ \psi)$.

$(\bar{\exists}\varphi \in \mathtt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})$ no se cumple $(\varphi\ eq\ \psi)$
$\Leftrightarrow$ (definición de equivalencia)
$(\bar{\exists}\varphi \in \mathtt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})(\bar{\exists} v : Val) v(\varphi) \neq v(\psi)$
$\Leftarrow$ ($\neg\bot$ testigo del existencial)
$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})(\bar{\exists} v : Val) v(\neg\bot) \neq v(\psi)$
$\Leftrightarrow$ ($\neg\bot$ es una tautología)
$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})(\bar{\exists} v : Val) 1 \neq v(\psi)$
$\Leftrightarrow$ (aritmética)
$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})(\bar{\exists} v : Val) 0 = v(\psi)$

Por lo tanto vamos a probar que no hay tautologías en $\mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}}$, es decir:

$$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})(\bar{\exists} v : Val) 0 = v(\psi)$$

Lema 5

T) $(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP}_{\{\wedge,\ \bot\}})(\bar{\exists} v : Val) 0 = v(\psi)$

Demo.

Demostración por PIP en $\texttt{PROP}_{\{\wedge,\ \perp\}}$.

Identificación de la propiedad: $P(\psi) := (\bar{\exists} v : Val)0 = v(\psi)$

Paso Base 1

T) $P(p_i) : (\bar{\exists} v : Val)0 = v(p_i)$

Demo.

Sea v_1 la valuación tal que $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}) v_1(p_i) = 0$.

Paso Base 2

T) $P(\perp) : (\bar{\exists} v : Val)0 = v(\perp)$

Demo.

Sea v_1 cualquier valuación, por definición se cumple que $v_1(\perp) = 0$

Paso Inductivo

HI) $P(\alpha) : (\bar{\exists} v : Val)0 = v(\alpha)$

$P(\beta) : (\bar{\exists} v : Val)0 = v(\beta)$

TI) $P(\alpha \wedge \beta) : (\bar{\exists} v : Val)0 = v(\alpha \wedge \beta)$

Demo.

Sea v_1 una valuación que cumple $v_1(\alpha) = 0$ (sabemos que existe por la HI)

Por definición de valuación $v_1(\alpha \wedge \beta) = 0$

Por PIP para $\texttt{PROP}_{\{\wedge,\perp\}}$, se cumple $(\bar{\forall} \psi \in \texttt{PROP}_{\{\wedge,\ \perp\}})(\bar{\exists} v : Val)0 = v(\psi)$

Ejercicio 12 (Más formas normales)

Bosquejo de solución

a. Definimos el subconjunto de $\texttt{PROP}$ con los conectivos $\wedge, \vee, \bot, \neg$, $\texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$, como en los prácticos anteriores,

I $p_i \in \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$
II $\bot \in \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$
III Si $\alpha \in \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$, $\beta \in \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$ y $* \in \{\wedge, \vee\}$ entonces $(\alpha * \beta) \in \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$
IV Si $\alpha \in \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$ entonces $(\neg\alpha) \in \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$

b. Utilizando el ERP de $\texttt{PROP}$ definimos la función f,

$$
\begin{aligned}
f : \texttt{PROP} &\to \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg} \\
f(p_i) &= p_i \\
f(\bot) &= \bot \\
f((\alpha \wedge \beta)) &= (f(\alpha) \wedge f(\beta)) \\
f((\alpha \vee \beta)) &= (f(\alpha) \vee f(\beta)) \\
f((\alpha \to \beta)) &= (\neg f(\alpha) \vee f(\beta)) \\
f((\alpha \leftrightarrow \beta)) &= ((\neg f(\alpha) \vee f(\beta)) \wedge (\neg f(\beta) \vee f(\alpha))) \\
f((\neg\alpha)) &= (\neg f(\alpha))
\end{aligned}
$$

Observamos que el recorrido de f es efectivamente $\texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$.
Luego, se quiere probar que : $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi\ eq\ f(\varphi))$

Realizaremos la demostración aplicando el PIP para $\texttt{PROP}$ en φ.
Identificamos ahora la propiedad a utilizar,

$$P(\varphi) := \varphi\ eq\ f(\varphi)$$

Paso Base 1

T) $P(p_i) : p_i\ eq\ f(p_i)$

Demo.

Por la reflexividad de eq se cumple,

$$
\begin{aligned}
&f(p_i)\ eq\ f(p_i) \\
&\Leftrightarrow \text{(por def. } f,\ f(p_i) = p_i) \\
&p_i\ eq\ f(p_i)
\end{aligned}
$$

Paso Base 2

T) $P(\bot) : \bot\ eq\ f(\bot)$

Demo.

Por la reflexividad de eq se cumple,

$$
\begin{aligned}
&f(\bot)\ eq\ f(\bot) \\
&\Leftrightarrow \text{(por def } f\ f(\bot) = \bot) \\
&\bot\ eq\ f(\bot)
\end{aligned}
$$

Paso Inductivo 1

HI) $P(\alpha) : \alpha\ eq\ f(\alpha)$
$P(\beta) : \beta\ eq\ f(\beta)$

TI) $P((\alpha \land \beta)) : (\alpha \land \beta)\ eq\ f((\alpha \land \beta))$

Demo.

$$\begin{aligned}
&(\alpha \land \beta)\ eq\ f((\alpha \land \beta)) \\
&\Leftrightarrow \text{(\textbf{HI} y teo. sust.)} \\
&(f(\alpha) \land f(\beta))\ eq\ f((\alpha \land \beta)) \\
&\Leftrightarrow \text{(def } f\text{)} \\
&f((\alpha \land \beta))\ eq\ f((\alpha \land \beta))
\end{aligned}$$

Esto se cumple por la reflexividad de eq.

Paso Inductivo 2

HI) $P(\alpha) : \alpha\ eq\ f(\alpha)$
$P(\beta) : \beta\ eq\ f(\beta)$

TI) $P((\alpha \lor \beta)) : (\alpha \lor \beta)\ eq\ f((\alpha \lor \beta))$

Demo.

$$\begin{aligned}
&(\alpha \lor \beta)\ eq\ f((\alpha \lor \beta)) \\
&\Leftrightarrow \text{(\textbf{HI} y teo. sust.)} \\
&(f(\alpha) \lor f(\beta))\ eq\ f((\alpha \lor \beta)) \\
&\Leftrightarrow \text{(def } f\text{)} \\
&f((\alpha \lor \beta))\ eq\ f((\alpha \lor \beta))
\end{aligned}$$

Esto se cumple por la reflexividad de eq.

Paso Inductivo 3

HI) $P(\alpha) : \alpha\ eq\ f(\alpha)$
$P(\beta) : \beta\ eq\ f(\beta)$

TI) $P((\alpha \to \beta)) : (\alpha \to \beta)\ eq\ f((\alpha \to \beta))$

Demo.

$$\begin{aligned}
&(\alpha \to \beta)\ eq\ f((\alpha \to \beta)) \\
&\Leftrightarrow \text{(\textbf{HI} y teo. sust.)} \\
&(f(\alpha) \to f(\beta))\ eq\ f((\alpha \to \beta)) \\
&\Leftrightarrow \text{(Leyes algebraicas)} \\
&((\neg f(\alpha)) \lor f(\beta))\ eq\ f((\alpha \to \beta)) \\
&\Leftrightarrow \text{(def de } f\text{)} \\
&f((\alpha \to \beta))\ eq\ f((\alpha \to \beta))
\end{aligned}$$

Esto se cumple por la reflexividad de eq.

Paso Inductivo 4

HI) $P(\alpha) : \alpha\ eq\ f(\alpha)$
$P(\beta) : \beta\ eq\ f(\beta)$

TI) $P((\alpha \leftrightarrow \beta)) : (\alpha \leftrightarrow \beta)\ eq\ f((\alpha \leftrightarrow \beta))$

Demo.

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \ eq \ f((\alpha \leftrightarrow \beta))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (\textbf{HI} y teo. sust.)}$$
$$(f(\alpha) \leftrightarrow f(\beta)) \ eq \ f((\alpha \leftrightarrow \beta))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (Leyes algebraicas)}$$
$$((f(\alpha) \to f(\beta)) \land (f(\beta) \to f(\alpha)))) \ eq \ f((\alpha \leftrightarrow \beta))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (Leyes algebraicas y Teo. Sustitución)}$$
$$(((\neg f(\alpha)) \lor f(\beta)) \land ((\neg f(\beta)) \lor f(\alpha))) \ eq \ f((\alpha \leftrightarrow \beta))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def de } f)$$
$$f((\alpha \leftrightarrow \beta)) \ eq \ f((\alpha \leftrightarrow \beta))$$

Esto se cumple por la reflexividad de eq.

Paso Inductivo 5

HI) $P(\alpha) : \alpha \ eq \ f(\alpha)$

TI) $P((\neg\alpha)) : (\neg\alpha) \ eq \ f((\neg\alpha))$

Demo.

$$(\neg\alpha) \ eq \ f((\neg\alpha))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (\textbf{HI} y teo. sust.)}$$
$$(\neg f(\alpha)) \ eq \ f((\neg\alpha))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (def. } f)$$
$$f((\neg\alpha)) \ eq \ f((\neg\alpha))$$

Esto se cumple por la reflexividad de eq.

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para `PROP`, podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \ eq \ f(\varphi))$$

c. I $p_i \in FNN$

II $\bot \in FNN$

III Si $\alpha \in FNN$, $\beta \in FNN$ y $* \in \{\land, \lor\}$ entonces $(\alpha * \beta) \in FNN$

IV $(\neg p_i) \in FNN$

V $(\neg\bot) \in FNN$

Notar que $\neg$ solo puede estar aplicado a fórmulas atómicas.

d. Definiremos g convenientemente basados en la prueba de correctitud asociada.

Queremos probar

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_{\land,\lor,\bot,\neg})(\varphi \ eq \ g(\varphi))$$

Realizaremos la demostración usando el PIP para $\texttt{PROP}_{\land,\lor,\bot,\neg}$ en φ.
Identificamos la propiedad a probar sobre los elementos de $\texttt{PROP}_{\land,\lor,\bot,\neg}$:

$$P(\varphi) := \varphi \ eq \ g(\varphi)$$

Paso Base 1

T) $P(p_i) : p_i \ eq \ g(p_i)$

Demo.

Queremos probar

$$p_i \ eq \ g(p_i)$$

Definiendo $g(p_i) = p_i$, esto se cumple por la reflexividad de eq.
Observamos que $p_i \in FNN$ por regla I de FNN, por tanto esta es una definición válida para g.

Paso Base 2

T) $P(\perp) : \perp \ eq \ g(\perp)$

Demo.

Queremos probar

$$\perp \ eq \ g(\perp)$$

Definiendo $g(\perp) = \perp$, esto se cumple por la reflexividad de eq.
Observamos que $\perp \in FNN$ por regla II de FNN, por tanto esta es una definición válida para g.

Paso Inductivo 1

HI) $P(\alpha) : \alpha \ eq \ g(\alpha)$
$P(\beta) : \beta \ eq \ g(\beta)$

TI) $P((\alpha * \beta)) : (\alpha * \beta) \ eq \ g((\alpha * \beta))$

Demo.

Queremos probar

$$(\alpha * \beta) \ eq \ g((\alpha * \beta))$$
$$\Leftrightarrow \text{ (\textbf{HI} y Teo. Sust.)}$$
$$(g(\alpha) * g(\beta)) \ eq \ g((\alpha * \beta))$$

Luego definiendo,

$$g((\alpha * \beta)) = (g(\alpha) * g(\beta))$$

esto se cumple por la reflexividad de eq.

Suponiendo que la definición de g es correcta, $g(\alpha) \in FNN$ y $g(\beta) \in FNN$, entonces por regla III de FNN, $(g(\alpha) * g(\beta)) \in FNN$.

Paso Inductivo 2

HI) $P(\alpha) : \alpha \ eq \ g(\alpha)$

TI) $P((\neg\alpha)) : (\neg\alpha) \ eq \ g((\neg\alpha))$

Demo.

Tener mucho cuidado en la elección de g para las negaciones, porque el primer impulso es seguir como en el caso anterior y definir $g((\neg\alpha)) = (\neg g(\alpha))$, y esto sería incorrecto. Porque al momento de transformar proposiciones debemos tener cuidado de no agregar negaciones en fórmulas que no sean atómicas, dado que no pertenecen a FNN.

Definiremos entonces una funcion auxiliar h, que tome una fórmula de FNN y nos retorne una fórmula también en FNN equivalente a su negación. Para esto podemos por ejemplo hacer uso de las leyes de equivalencias. Daremos a continuación una definición de h tal que $h(\alpha)$ eq $(\neg\alpha)$ y luego probaremos su correctitud en el Lema 1:

$$\begin{aligned} h : FNN &\to FNN \\ h(p_i) &= (\neg p_i) \\ h(\bot) &= (\neg\bot) \\ h((\neg p_i)) &= p_i \\ h((\neg\bot)) &= \bot \\ h((\alpha \wedge \beta)) &= (h(\alpha) \vee h(\beta)) \\ h((\alpha \vee \beta)) &= (h(\alpha) \wedge h(\beta)) \end{aligned}$$

Eligiendo $g((\neg\alpha)) = h(g(\alpha))$

$$\begin{aligned} & g((\neg\alpha))\ eq\ g((\neg\alpha)) \\ & \Leftrightarrow \text{(def de } g\text{)} \\ & h(g(\alpha))\ eq\ g((\neg\alpha)) \\ & \Leftrightarrow \text{(Por el Lema 1, } h(g(\alpha))\ eq\ \neg g(\alpha) \text{ y Teo. Sust)} \\ & \neg g(\alpha)\ eq\ g((\neg\alpha)) \\ & \Leftrightarrow (\textbf{HI} \text{ y Teo. Sust.}) \\ & \neg\alpha\ eq\ g((\neg\alpha)) \end{aligned}$$

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para $\texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg}$ podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})\varphi\ eq\ g(\varphi)$$

Al finalizar la prueba podemos resumir la definición de la función g.

$$\begin{aligned} g : \texttt{PROP}_{\wedge,\vee,\bot,\neg} &\to FNN \\ g(p_i) &= p_i \\ g(\bot) &= \bot \\ g((\alpha * \beta)) &= (g(\alpha) * g(\beta)) \\ g((\neg\alpha)) &= h(g(\alpha)) \end{aligned}$$

Resta probar el **Lema 1**:

$$(\bar{\forall}\alpha \in FNN)h(\alpha)\ eq\ (\neg\alpha)$$

esto lo haremos con una inducción sobre FNN.

Identificación de la propiedad $P(\alpha) := h(\alpha)\ eq\ (\neg\alpha)$

Paso Base 1

T) $P(p_i) : h(p_i)\ eq\ (\neg p_i)$

Demo.

$$\begin{aligned} & h(p_i)\ eq\ (\neg p_i) \\ & \Leftrightarrow \text{(Definición de } h\text{)} \\ & (\neg p_i)\ eq\ (\neg p_i) \end{aligned}$$

Esto se cumple por la reflexiva de la equivalencia.

Paso Base 2

T) $P(\bot) : h(\bot)\ eq\ (\neg\bot)$

Demo.

$$h(\bot)\ eq\ (\neg\bot)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } h\text{)}$$
$$(\neg\bot)\ eq\ (\neg\bot)$$

Esto se cumple por la reflexiva de la equivalencia.

Paso Base 3

T) $P((\neg p_i)) : h((\neg p_i))\ eq\ (\neg(\neg p_i))$

Demo.

$$h((\neg p_i))\ eq\ (\neg(\neg p_i))$$
$$\Leftrightarrow \text{(Leyes Algebraicas } p_i\ eq\ (\neg(\neg p_i))\text{)}$$
$$h((\neg p_i))\ eq\ p_i$$
$$\Leftrightarrow \text{(def } h\text{)}$$
$$p_i\ eq\ p_i$$

Esto se cumple por la reflexiva de la equivalencia.

Paso Base 4

T) $P(p_i) : h((\neg\bot))\ eq\ (\neg(\neg\bot))$

Demo.

$$h((\neg\bot))\ eq\ (\neg(\neg\bot))$$
$$\Leftrightarrow \text{(Leyes Algebraicas } \bot\ eq\ (\neg(\neg\bot))\text{)}$$
$$h((\neg\bot))\ eq\ \bot$$
$$\Leftrightarrow \text{(def } h\text{)}$$
$$\bot\ eq\ \bot$$

Esto se cumple por la reflexiva de la equivalencia.

Paso Inductivo 1

HI) $P(\alpha) : h(\alpha)\ eq\ (\neg\alpha)$
$P(\beta) : h(\beta)\ eq\ (\neg\beta)$

TI) $P((\alpha\wedge\beta)) : h((\alpha\wedge\beta))\ eq\ (\neg(\alpha\wedge\beta))$

Demo.

$$h((\alpha\wedge\beta))\ eq\ (\neg(\alpha\wedge\beta))$$
$$\Leftrightarrow \text{(Leyes de Morgan)}$$
$$h((\alpha\wedge\beta))\ eq\ ((\neg\alpha)\vee(\neg\beta))$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{HI} \text{ y Teo Sustitución})$$
$$h((\alpha\wedge\beta))\ eq\ (h(\alpha)\vee h(\beta))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. de } h\text{)}$$
$$h((\alpha\wedge\beta))\ eq\ h((\alpha\wedge\beta))$$

Esto se cumple por la reflexividad de eq.

Paso Inductivo 2

HI) $P(\alpha) : h(\alpha)\ eq\ (\neg\alpha)$
$P(\beta) : h(\beta)\ eq\ (\neg\beta)$

TI) $P((\alpha\vee\beta)) : h((\alpha\vee\beta))\ eq\ (\neg(\alpha\vee\beta))$

Demo.

$$h((\alpha \vee \beta))\ eq\ (\neg(\alpha \vee \beta))$$
$\Leftrightarrow$ (Leyes de Morgan)
$$h((\alpha \vee \beta))\ eq\ ((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$$
$\Leftrightarrow$ (**HI** y Teo Sustitución)
$$h((\alpha \vee \beta))\ eq\ (h(\alpha) \wedge h(\beta))$$
$\Leftrightarrow$ (def. de h)
$$h((\alpha \vee \beta))\ eq\ h((\alpha \vee \beta))$$

Esto se cumple por la reflexividad de eq.

Entonces, como estamos en las hiótesis del PIP para FNN, todos los elementos $\varphi \in FNN$ cumplen que $(\neg\varphi)\ eq\ h(\varphi)$.

Ejercicio 13 (Orden)

Bosquejo de solución

a. A partir de la propiedad probada en el ejercicio 5, sabemos que $\models \varphi \to \psi$ ssi $\|\varphi\| \subseteq \|\psi\|$.

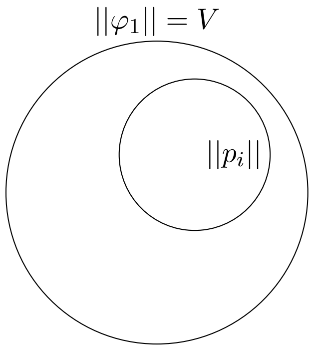
   Para que se cumpla $\varphi \ll \psi$, la definición además nos pide que no se cumpla $\models \psi \to \varphi$. Bajo la misma propiedad del ejercicio 5, esto implica que $\|\psi\| \nsubseteq \|\varphi\|$.

   Por lo tanto, dado que se debe cumplir que $\|\varphi\| \subseteq \|\psi\|$ y $\|\psi\| \nsubseteq \|\varphi\|$, llegamos a la siguiente definición: $\varphi \ll \psi$ ssi $\|\varphi\| \subset \|\psi\|$.

b. - Caso 1: φ es tautologia.

     En este caso, ya que φ es tautologia podemos afirmar que para cualquier valuación v, se cumple que $v(\varphi) = 1$. Por lo tanto, toda valuación v cumple $v \in \|\varphi\|$ ($\|\varphi\| = V$).

     Consideremos ahora la letra proposicional p_i. Sabemos que cualquier valuación v_1 que cumpla $v_1(p_i) = 1$, y por lo tanto $v_1 \in \|p_i\|$, también va a cumplir $v_1 \in \|V\|$, por lo tanto se cumple $\|p_i\| \subseteq V$. Además, podemos definir una valuación v_2 que cumpla $v_2(p_i) = 0$. En este caso, $v_2 \notin \|p_i\|$. Como $v_2 \in V$ ya que es una valuación pero $v_2 \notin \|p_i\|$, podemos afirmar que $\|p_i\| \subset V = \|\varphi\|$. Los diagramas de Venn para los conjuntos $\|\varphi\|$ y $\|p_i\|$ son:



     Considerando la definición alternativa planteada en la parte a, vemos que se cumple que $p_i \ll \varphi$.

- Caso 2: φ es contradicción.

  En este caso, ya que φ es contradicción podemos afirmar que para cualquier valuación v, se cumple que $v(\varphi) = 0$. Por lo tanto observamos que $\|\varphi\| = \emptyset$.

  Por otro lado, en el caso anterior encontramos una valuación, v_1, tal que $v_1 \in \|p_i\|$. Por lo tanto vemos que $\|p_i\| \neq \emptyset$.

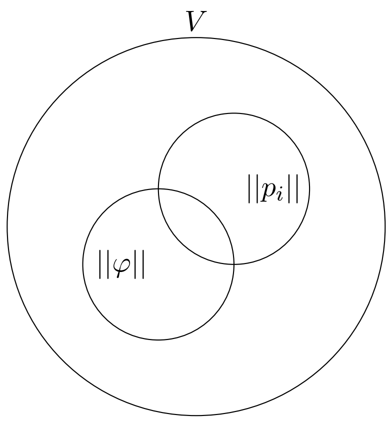
  En conclusión, podemos afirmar que $\|\varphi\| = \emptyset \subset \|p_i\|$, lo cual significa que $\varphi \ll p_i$.

- Caso 3: φ es contingencia.

  En este caso, existen valuaciones en V que hacen verdadera a φ y otras que no. Por hipótesis, p_i no ocurre en φ. Esto implica que el valor de verdad de φ no esta determinado por el valor de verdad de p_i. Por lo tanto podemos definir las siguiente valuaciones:

  - v_1 valuación tal que $v_1(\varphi) = 0$ y $v_1(p_i) = 0$, y por lo tanto $v_1 \notin \|\varphi\|$ y $v_1 \notin \|p_i\|$
  - v_2 valuación tal que $v_2(\varphi) = 0$ y $v_2(p_i) = 1$, y por lo tanto $v_2 \notin \|\varphi\|$ y $v_2 \in \|p_i\|$
  - v_3 valuación tal que $v_3(\varphi) = 1$ y $v_3(p_i) = 0$, y por lo tanto $v_3 \in \|\varphi\|$ y $v_3 \notin \|p_i\|$
  - v_4 valuación tal que $v_4(\varphi) = 1$ y $v_4(p_i) = 1$, y por lo tanto $v_4 \in \|\varphi\|$ y $v_4 \in \|p_i\|$

  Los diagramas de Venn para los conjuntos V, $\|\varphi\|$ y $\|p_i\|$ son los siguentes:

  En este caso, se observa que $\|p_i\| \not\subset \|\varphi\|$ y $\|\varphi\| \not\subset \|p_i\|$. Por lo tanto, concluimos que no se puede realizar ninguna afirmación sobre como se comportan p_i y φ según la relación $\ll$ (no son comparables).

c. **H)** $\varphi, \psi \in \texttt{PROP}$ tales que $\varphi \ll \psi$

T) Existe $\sigma \in \texttt{PROP}$ tal que $\varphi \ll \sigma \ll \psi$

Demo)

Para esta demostración seguiremos las sugerencias planteadas en la letra del ejercicio.

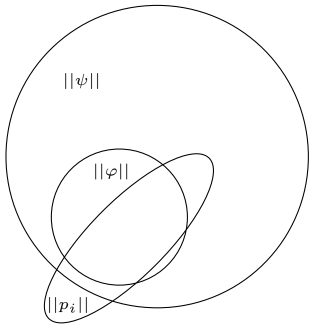
En primer lugar, consideramos una letra de proposición p_i tal que p_i no ocurre en φ ni en ψ.

Por hipótesis, sabemos que $\varphi \ll \psi$. Utilizando la definición alternativa planteada en la parte a, podemos afirmar que $\|\varphi\| \subset \|\psi\|$.

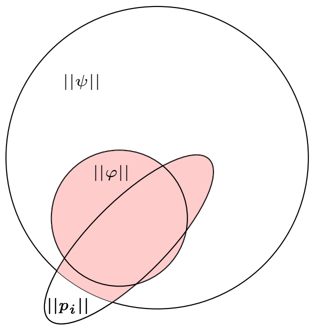
Por otro lado, dado que p_i no ocurre en φ ni en ψ, el valor de verdad de φ o de ψ no depende del valor de verdad de p_i. Por lo tanto, del conjunto de valuaciones que hacen verdadera a p_i ($\|p_i\|$) hay valuaciones que no hacen verdadera a φ ni a ψ (y por lo tanto esas valuaciones no pertenecen a $\|\psi\|$ ni a $\|\varphi\|$), hay valuaciones que hacen verdadera a ψ y no a φ (y por lo tanto pertenecen a $\|\psi\|$ y no a $\|\varphi\|$) y hay valuaciones que hacen verdadera a ψ y a φ (y por lo tanto pertenecen a $\|\psi\|$ y a

$\|\varphi\|$). Es importante notar que toda valuación que haga verdadera a ψ tambien hace verdadera a φ, ya que se cumple $\varphi \ll \psi$.

Teniendo esto en cuenta, planteamos los diagramas de Venn de los conjuntos $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$ y $\|p_i\|$ de la siguiente forma:



Observando estos diagramas, construiremos $\|\sigma\|$ utilizando operaciones sobre conjuntos. Nuestro objetivo es hallar σ tal que $\varphi \ll \sigma \ll \psi$. Utilizando nuestra definición alternativa de $\ll$, necesitamos que $\|\varphi\| \subset \|\sigma\|$ y $\|\sigma\| \subset \|\psi\|$. Traduciendo esto a lenguaje natural, necesitamos que $\|\sigma\|$ cubra todo $\|\varphi\|$ pero que esté incluido dentro de $\|\psi\|$. Esto lo podemos lograr tomando todo $\|\varphi\|$ y agregando elementos que no estan en $\|\varphi\|$ pero si estan en $\|\psi\|$. Por ejemplo, podemos tomar el área pintada en el diagrama:



Podemos obtener el área pintada con operaciones de conjuntos de la siguiente forma: $\|\sigma\| = \|\varphi\| \cup (\|\psi\| \cap \|p_i\|)$.

Utilizando las equivalencias demostradas en el ejercicio 5 entre operaciones de conjuntos y conectivos proposicionales:

$$\begin{aligned}
&\|\sigma\| = \|\varphi\| \cup (\|\psi\| \cap \|p_i\|)\\
&\Leftrightarrow \text{(Por ej. 5)}\\
&\|\sigma\| = \|\varphi\| \cup \|(\psi \wedge p_i)\|\\
&\Leftrightarrow \text{(Por ej. 5)}\\
&\|\sigma\| = \|\varphi \vee (\psi \wedge p_i)\|\\
&\Rightarrow\\
&\sigma = \varphi \vee (\psi \wedge p_i)
\end{aligned}$$

Logramos construir $\sigma \in \texttt{PROP}$ que cumple que $\varphi \ll \sigma \ll \psi$, para φ y ψ arbitrarios.

Por lo tanto, probamos que la relación "$\ll$" es densa en PROP.

d. Buscamos un elemento maximal de "$\ll$", recordemos que una fórmula φ será maximal de la relación "$\ll$" si y solo si:

$$\neg((\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})\varphi \ll \psi)$$

Veamos que debería cumplir la fórmula φ buscada

$$\neg((\bar{\exists}\psi \in \mathtt{PROP})\varphi \ll \psi)$$
$$\Leftrightarrow \text{(por parte a.)}$$
$$\neg((\bar{\exists}\psi \in \mathtt{PROP})\|\varphi\| \subset \|\psi\|)$$
$$\Leftrightarrow \text{(de Morgan generalizado)}$$
$$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP})\|\varphi\| \supseteq \|\psi\|$$
$$\Rightarrow \text{(} V \text{ es el conjunto de todas las valuaciones)}$$
$$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP})V \supseteq \|\psi\|$$

La fórmula φ buscada deberá cumplir que $\|\varphi\| = V$. Por lo visto en la parte b., φ deberá ser una tautología. Por lo tanto, un elemento maximal de la relación "$\ll$" es $\neg\bot$.

Resta encontrar un elemento minimal de "$\ll$" recordemos que una fórmula φ será minimal de la relación "$\ll$" si y solo si:

$$\neg((\bar{\exists}\psi \in \mathtt{PROP})\psi \ll \varphi)$$

Veamos que debería cumplir la fórmula φ buscada

$$\neg((\bar{\exists}\psi \in \mathtt{PROP})\psi \ll \varphi)$$
$$\Leftrightarrow \text{(por parte a.)}$$
$$\neg((\bar{\exists}\psi \in \mathtt{PROP})\|\psi\| \subset \|\varphi\|)$$
$$\Leftrightarrow \text{(de Morgan generalizado)}$$
$$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP})\|\psi\| \supseteq \|\varphi\|$$
$$\Rightarrow \text{(el conjunto } \emptyset \text{ está incluido en todos los conjuntos)}$$
$$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP})\|\psi\| \supseteq \emptyset$$

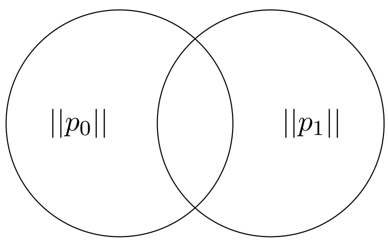
La fórmula φ buscada deberá cumplir que $\|\varphi\| = \emptyset$. Por lo visto en la parte b., φ deberá ser una contradicción. Por lo tanto, un elemento minimal de la relación "$\ll$" es $\bot$.

e. Empecemos por encontrar φ_1. Ya que necesitamos que se cumpla $p_0 \ll \varphi_1$, por nuestra definición alternativa de $\ll$, necesitamos que se cumpla $\|p_0\| \subset \|\varphi_1\|$.

Consideremos otra letra proposicional p_1. Consideremos ahora las siguientes valuaciones:

- v_1 valuación tal que $v_1(p_0) = 0$ y $v_1(p_1) = 1$. Tenemos entonces que $v_1 \notin \|p_0\|$ y $v_1 \in \|p_1\|$.
- v_2 valuación tal que $v_2(p_0) = 1$ y $v_2(p_1) = 0$. Tenemos entonces que $v_2 \in \|p_0\|$ y $v_2 \notin \|p_1\|$.
- v_3 valuación tal que $v_3(p_0) = 1$ y $v_3(p_1) = 1$. Tenemos entonces que $v_3 \in \|p_0\|$ y $v_3 \in \|p_1\|$.

Por lo tanto, podemos plantear los diagramas de Venn para $\|p_0\|$ y $\|p_1\|$ de la siguiente forma:

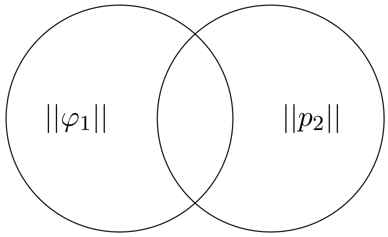


Necesitamos hallar φ_1 tal que $\|p_0\| \subset \|\varphi_1\|$. Esto lo podemos lograr tomando $\|p_0\|$ y agregando elementos que no estan en $\|p_0\|$, pero de forma de que el conjunto $\|\varphi_1\|$ se pueda escribir como operaciones de conjuntos entre conjuntos caracteristicos. Por ejemplo, podemos tomar la unión de ambos conjuntos, es decir $\|\varphi_1\| = \|p_0\| \cup \|p_1\|$. Dado que $\|p_1\| - \|p_0\| \neq \emptyset$ (podemos ver esto gracias a la valuación v_1 definida antes), se cumple que $\|p_0\| \subset \|\varphi_1\|$. Además, utilizando las propiedades del ejercicio 5, tenemos que:

$$\|\varphi_1\| = \|p_0\| \cup \|p_1\| = \|p_0 \vee p_1\|$$

Y por lo tanto podemos tomar $\varphi_1 = p_0 \vee p_1$.

Ahora definimos φ_2. Se debe cumplir $\varphi_1 \ll \varphi_2$; es decir, $\|\varphi_1\| \subset \|\varphi_2\|$. Consideramos una letra proposicional que no ocurra en φ_1; por ejemplo, p_2. Siguiendo un razonamiento similar al planteado antes, podemos dibujar los diagramas de Venn de $\|\varphi_1\|$ y $\|p_2\|$ de la siguiente forma:



Ya que necesitamos que $\|\varphi_1\| \subset \|\varphi_2\|$, siguiendo un razomiento análogo al caso anterior definimos $\|\varphi_2\| = \|\varphi_1\| \cup \|p_2\|$. Utilizando las propiedades del ejercicio 5 tenemos que:

$$\|\varphi_2\| = \|\varphi_1\| \cup \|p_2\| = \|\varphi_1 \vee p_2\| = \|p_0 \vee p_1 \vee p_2\|$$

Y por lo tanto podemos tomar $\varphi_2 = p_0 \vee p_1 \vee p_2$. En este punto tenemos que $\|p_0\| \subset \|\varphi_1\| \subset \|\varphi_2\|$, y entonces tenemos que $p_0 \ll \varphi_1 \ll \varphi_2$.

Continuando con el mismo razonamiento, podemos observar que φ_n se define como:

$$\varphi_n = \bigvee_{i=0}^{n} p_i; n \geqslant 1$$

f. Necesitamos hallar φ y ψ, no equivalentes entre si, tal que no se cumpla $\varphi \ll \psi$ y no se cumpla $\psi \ll \varphi$. Por ejemplo, podemos tomar $\varphi = p_0$ y $\psi = p_1$.

- No se cumple $p_0 \ll p_1$: Podemos ver que si tomamos una valuación v tal que $v(p_0) = 1$ y $v(p_1) = 0$ tenemos que $v(p_0 \to p_1) = 0$. Por lo tanto no se cumple $\models p_0 \to p_1$, y por lo tanto no se cumple $p_0 \ll p_1$.
- No se cumple $p_1 \ll p_0$: Podemos ver que si tomamos una valuación v tal que $v(p_0) = 0$ y $v(p_1) = 1$ tenemos que $v(p_1 \to p_0) = 0$. Por lo tanto no se cumple $\models p_1 \to p_0$, y por lo tanto no se cumple $p_1 \ll p_0$.

En conclusión, p_0 y p_1 son incomparables según la relación $\ll$.

Ejercicio 14 (Sustitución)

Bosquejo de solución

a. La propiedad dada en esta parte es:

$(\bar{\forall} v : Val)(\bar{\forall} \varphi_1 \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} \varphi_2 \in \texttt{PROP})(v(\varphi_1) = v(\varphi_2) \Rightarrow (\bar{\forall} \psi \in \texttt{PROP}) v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2)))$

Como la valuación v y las fórmulas φ_1, φ_2 están cuantificadas en forma universal nos vamos a considerar una valuación y un par de fórmulas genéricas (o sea sin condiciones) que usaremos como hipótesis global en toda la demostración.

Por otro lado la prueba que se debe realizar es una implicación, o sea hay que probar que si se cumple el antecedente $(v(\varphi_1) = v(\varphi_2))$ entonces se cumple el consecuente $(\bar{\forall} \psi \in \texttt{PROP}) v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2)))$. Por lo tanto agregaremos el antecedente a nuestra hipótesis global y la propiedad a demostrar es:

$$(\bar{\forall} \psi \in \texttt{PROP}) v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2)))$$

Realizaremos la demostración usando el PIP para $\texttt{PROP}$ en ψ.
Identificamos ahora la propiedad a utilizar,

$$P(\psi) := v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$$

Paso Base 1

T) $P(p_1) : v(p_i(\varphi_1)) = v(p_i(\varphi_2))$

Demo.

Separamos en casos según el valor de p_i.

Caso 1 $p_i = p$

Queremos probar

$$v(p_i(\varphi_1)) = v(p_i(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(} p_i = p \text{ y def. sust.)}$$
$$v(\varphi_1) = v(\varphi 2)$$

Esto se cumple por hipótesis.

Caso 2 $p_i \neq p$

$$v(p_i(\varphi_1)) = v(p_i(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(} p_i \neq p \text{ y def. sust.)}$$
$$v(p_i) = v(p_i)$$

Esto se cumple por la propiedad reflexiva de la igualdad.

Paso Base 2

T) $P(\bot) : v(\bot(\varphi_1)) = v(\bot(\varphi_2))$

Demo.

Queremos probar

$$v(\bot(\varphi_1)) = v(\bot(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. sust.)}$$
$$v(\bot) = v(\bot)$$

Esto se cumple por la propiedad reflexiva de la igualdad.

Paso Inductivo 1

HI) $P(\psi) : v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$

TI) $P((\neg\psi)) : v((\neg\psi)(\varphi_1)) = v((\neg\psi)(\varphi_2))$

Demo.

Queremos probar

$$v((\neg\psi)(\varphi_1)) = v((\neg\psi)(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. sust.)}$$
$$v((\neg\psi(\varphi_1))) = v((\neg\psi(\varphi_2)))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. val.)}$$
$$1 - v(\psi(\varphi_1)) = 1 - v(\psi(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(arit.)}$$
$$v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$$

Esto se cumple por hipótesis inductiva.

Paso Inductivo 2

HI) $P(\psi) : v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$

$P(\delta) : v(\delta(\varphi_1)) = v(\delta(\varphi_2))$

TI) $P((\psi \wedge \delta)) : v((\psi \wedge \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \wedge \delta)(\varphi_2))$

Demo.

Queremos probar

$$v((\psi \wedge \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \wedge \delta)(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. sust.)}$$
$$v((\psi(\varphi_1) \wedge \delta(\varphi_1))) = v((\psi(\varphi_2) \wedge \delta(\varphi_2)))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. val.)}$$
$$\text{mín}\{v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\} = \text{mín}\{v(\psi(\varphi_2)), v(\delta(\varphi_2))\}$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{HI})$$
$$\text{mín}\{v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\} = \text{mín}\{v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\}$$

Esto se cumple por la propiedad reflexiva de la igualdad.

Paso Inductivo 3

HI) $P(\psi) : v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$

$P(\delta) : v(\delta(\varphi_1)) = v(\delta(\varphi_2))$

TI) $P((\psi \vee \delta)) : v((\psi \vee \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \vee \delta)(\varphi_2))$

Demo.

Queremos probar

$$v((\psi \vee \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \vee \delta)(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. sust.)}$$
$$v((\psi(\varphi_1) \vee \delta(\varphi_1))) = v((\psi(\varphi_2) \vee \delta(\varphi_2)))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. val.)}$$
$$\text{máx}\{v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\} = \text{máx}\{v(\psi(\varphi_2)), v(\delta(\varphi_2))\}$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{HI})$$
$$\text{máx}\{v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\} = \text{máx}\{v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\}$$

Esto se cumple por la propiedad reflexiva de la igualdad.

Paso Inductivo 4

HI) $P(\psi) : v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$

$P(\delta) : v(\delta(\varphi_1)) = v(\delta(\varphi_2))$

TI) $P((\psi \to \delta)) : v((\psi \to \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \to \delta)(\varphi_2))$

Demo.

Queremos probar

$$v((\psi \to \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \to \delta)(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. sust.)}$$
$$v((\psi(\varphi_1) \to \delta(\varphi_1))) = v((\psi(\varphi_2) \to \delta(\varphi_2)))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. val.)}$$
$$\text{máx}\{1 - v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\} = \text{máx}\{1 - v(\psi(\varphi_2)), v(\delta(\varphi_2))\}$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{HI})$$
$$\text{máx}\{1 - v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\} = \text{máx}\{1 - v(\psi(\varphi_1)), v(\delta(\varphi_1))\}$$

Esto se cumple por la propiedad reflexiva de la igualdad.

Paso Inductivo 5

HI) $P(\psi) : v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$
$P(\delta) : v(\delta(\varphi_1)) = v(\delta(\varphi_2))$

TI) $P((\psi \leftrightarrow \delta)) : v((\psi \leftrightarrow \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \leftrightarrow \delta)(\varphi_2))$

Demo.

Queremos probar

$$v((\psi \leftrightarrow \delta)(\varphi_1)) = v((\psi \leftrightarrow \delta)(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. sust.)}$$
$$v((\psi(\varphi_1) \leftrightarrow \delta(\varphi_1))) = v((\psi(\varphi_2) \leftrightarrow \delta(\varphi_2)))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. val.)}$$
$$v(\psi(\varphi_1)) = v(\delta(\varphi_1)) \text{ y } v((\psi(\varphi_2)) = v(\delta(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{HI})$$
$$v((\psi(\varphi_1)) = v(\delta(\varphi_1)) \text{ y } v((\psi(\varphi_2)) = v(\delta(\varphi_1))$$
$$\Leftrightarrow \text{(propiedad simétrica de la igualdad)}$$
$$v((\psi(\varphi_1)) = v(\delta(\varphi_1)) \text{ y } v(\delta(\varphi_1)) = v((\psi(\varphi_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(propiedad transitiva de la igualdad)}$$
$$v((\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$$

Esto se cumple por hipótesis inductiva.

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para PROP, podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP}) v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2))$$

b. I. $\varphi(\top) \models \varphi(\varphi(\top))$

Demo.

$$\varphi(\top) \models \varphi(\varphi(\top))$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } \models)$$
$$(\bar{\forall} v : Val)(\text{Si } v(\varphi(\top)) = 1 \text{ entonces } v(\varphi(\varphi(\top)) = 1)$$

Sea v_1 una valuación tal que $v_1(\varphi(\top)) = 1$.
Entonces como $\top$ es tautología tenemos,

$$v_1(\varphi(\top)) = v_1(\top)$$
$$\Rightarrow \text{(parte a.)}$$
$$v_1(\varphi(\varphi(\top))) = v_1(\varphi(\top))$$
$$\Rightarrow (v_1(\varphi(\top)) = 1)$$
$$v_1(\varphi(\varphi(\top))) = 1$$

La única restricción para v_1 es que $v_1(\varphi(\top)) = 1$, entonces se cumple lo pedido.

II. $\varphi(p) \models \varphi(\varphi(\top))$

Demo.

$\varphi(p) \models \varphi(\varphi(\top))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\forall} v : Val)(\text{Si } v\,(\varphi(p)) = 1 \text{ entonces } v\,(\varphi(\varphi(\top))) = 1)$

Supongamos por absurdo que

$(\bar{\exists} v_1 : Val)(v_1\,(\varphi(p)) = 1 \text{ y } v_1\,(\varphi(\varphi(\top))) = 0)$ **(A)**

Entonces tenemos que para v_1 se cumple,

$v_1(\varphi(p)) \neq v_1(\varphi(\varphi(\top)))$
$\Rightarrow$ (contrarecíproco de parte a.)
$v_1(p) \neq v_1(\varphi(\top))$

Separamos ahora en los casos posibles:

Caso 1 $v_1(p) = 0$ y $v_1(\varphi(\top)) = 1$

$v_1(\varphi(\top)) = 1$
$\Rightarrow$ (parte bI.)
$v_1(\varphi(\varphi(\top))) = 1$

Esto contradice la segunda parte del supuesto **(A)**.

Caso 2 $v_1(p) = 1$ y $v_1(\varphi(\top)) = 0$

Por definición de $\top$ tenemos,

$\models \top$
$\Rightarrow$ (def. tautología)
$v_1(p) = v_1(\top)$
$\Rightarrow$ (parte a.)
$v_1(\varphi(p)) = v_1(\varphi(\top))$
$\Rightarrow$ (caso actual)
$v_1(\varphi(p)) = 0$

Esto contradice la primera parte del supuesto **(A)**.

III. $\varphi(p), \neg\varphi(\top) \models p \leftrightarrow \bot$

Demo.

$\varphi(p), \neg\varphi(\top) \models p \leftrightarrow \bot$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\forall} v : Val)(\text{Si } v(\varphi(p)) = 1 \text{ y } v(\neg\varphi(\top)) = 1 \text{ entonces } v(p \leftrightarrow \bot) = 1)$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi(p)) = 1$ y $v(\neg\varphi(\top)) = 1$.
Queremos probar que también cumple $v(p \leftrightarrow \bot) = 1$.

Esto es lo mismo que $v(p) = 0$ como probamos a continuación:

$v(p \leftrightarrow \bot) = 1$
$\Leftrightarrow$ (def. val.)
$v(p) = v(\bot)$
$\Leftrightarrow$ (def. val.)
$v(p) = 0$

Veamos que esto se cumple.
Sabemos que $v(\varphi(p)) = 1$ y $v(\neg\varphi(\top)) = 1$, entonces por definición de valuación,

$v(\varphi(p)) \neq v(\varphi(\top))$
$\Rightarrow$ (contrarrecíproco de parte a.)
$v(p) \neq v(\top)$
$\Rightarrow$ ($\top$ es tautología)
$v(p) \neq 1$
$\Rightarrow$ (codominio de v)
$v(p) = 0$ (**B**)

IV. $\varphi(p), \neg\varphi(\top) \models \varphi(\varphi(\top))$

Demo.

$\varphi(p), \neg\varphi(\top) \models \varphi(\varphi(\top))$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\forall} v : Val)(\text{Si } v(\varphi(p)) = 1 \text{ y } v(\neg\varphi(\top)) = 1 \text{ entonces } v(\varphi(\varphi(\top))) = 1)$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi(p)) = 1$ y $v(\neg\varphi(\top)) = 1$.
Por la parte III. (**B**), sabemos que $v(p) = 0$ y por definición de valuación como $v(\neg\varphi(\top)) = 1$, $v(\varphi(\top)) = 0$.

Entonces,

$v(p) = v(\varphi(\top))$
$\Rightarrow$ (parte a.)
$v(\varphi(p)) = v(\varphi(\varphi(\top)))$
$\Rightarrow$ ($v(\varphi(p)) = 1$ y transitiva de la igualdad)
$v(\varphi(\varphi(\top))) = 1$