Solución del Problema de Evaluación 1

Antes de comenzar con la solución del problema propuesto discutiremos el campo eléctrico producido por una esfera con carga superficial, que consideraremos positiva, uniformemente distribuida. Para ver esto consideremos el esquema de la Figura 1, en el que se muestra una sección de la esfera y el campo producido por la carga contenida en dos diferenciales de arco $d\vec{s}_{1,2}$ sobre un punto P. Como podemos ver, por la simetría del problema, las componentes de campo según los versores $\hat{e}_\theta$ se cancelan, quedando solamente la componente según el versor $\hat{e}_r$. Un razonamiento análogo puede hacerse para cualquier sección de la esfera y para cualquier otro par de diferenciales $d\vec{s}_1'$ y $d\vec{s}_2'$, lo que nos permite ver que la contribución total de la distribución al campo en el punto P siempre será radial. Podemos asegurar entonces que el campo total producido por esta distribución de carga en un punto cualquiera del espacio será siempre de la forma $\vec{E} = E\hat{e}_r$. Además, también por la simetría del problema, sobre una esfera de radio r centrada en O el módulo del campo E será constante.

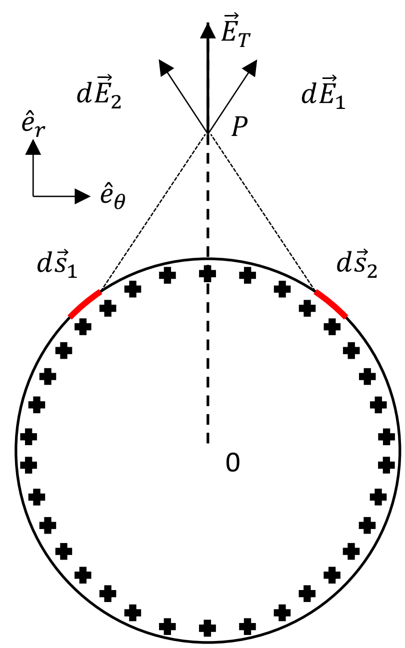

Figura 1: Campo eléctrico producido por una esfera con una distribución superficial de carga uniforme positiva.

Partes *a* y *b*:

Lo primero que es importante notar en la resolución de este problema es que tanto la esfera como el cascarón esférico son conductores. Por lo que las cargas en su interior, tanto las externas (que producen la carga neta Q) como las que forman el material, tienen la capacidad de moverse en su interior. Estos movimientos de carga son los que permiten que el sistema logre alcanzar el equilibrio electrostático.

Vemos que hay 4 regiones del espacio determinadas en el problema.

$\boldsymbol{r < R}$:

Para determinar la configuración de cargas en equilibrio electrostático consideraremos primero la esfera interior en la que $\vec{E} = 0$, por estar fabricada con un material conductor. Por lo tanto, aplicando la ley de Gauss, podemos asegurar que la carga neta encerrada por cualquier superficie S_1 debe ser igual a 0. A partir de este resultado podemos concluir que toda la carga $+Q$ de la esfera interior debe encontrarse en su superficie. Además, debido a que la distribución de las cargas será tal que minimice la energía del sistema, estas cargas se encontrarán distribuidas uniformemente sobre la superficie, lo que nos permite asegurar que el campo producido será radial saliente como ya discutimos anteriormente.

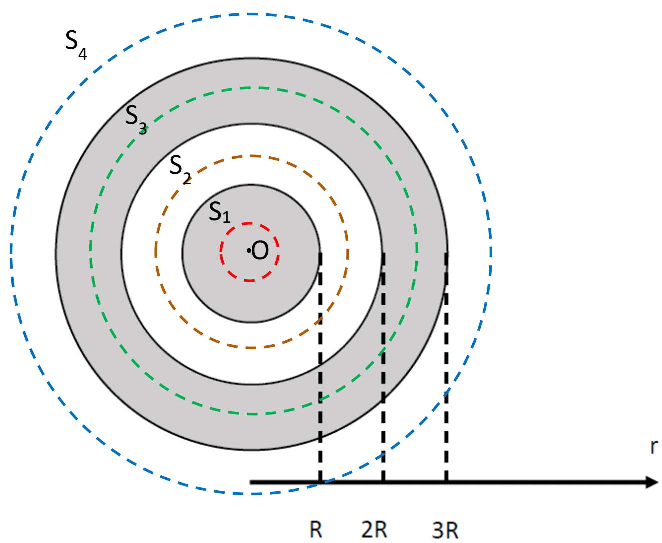

Figura 2: Geometría del problema y representación de las superficies Gaussianas S_i utilizadas en cada región (representadas en líneas a trazos).

$\boldsymbol{R < r < 2R}$:

El campo en esta región será el producido por la carga contenida en la esfera interior, de la que conocemos su magnitud y distribución. Por lo tanto, para calcular el campo que producen basta con aplicar la ley de Gauss considerando la superficie Gaussiana esférica S_2 observando que en todo punto la dirección del campo es paralela a la normal saliente, es decir que $\hat{e}_r \cdot \hat{n} = 1$, y que que el módulo del campo sobre dicha superficie es constante, con lo que se obtiene que:

$$\oiint_{S_2} E\ \hat{e}_r \cdot \hat{n}\ = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r \qquad \textit{Ec. 1}$$

Vemos que este resultado corresponde con el que obtendríamos si tuvieramos una carga puntual $+Q$ acumulada en el punto O.

$2R < r < 3R$:

Dentro del cascarón esférico también debemos tener $\vec{E} = 0$, ya que al igual que la esfera interior está fabricado con un material conductor. Esto implica que la carga neta encerrada por la superficie esférica S_3 debe ser cero. Esto solo se consigue si en la superficie interior del cascarón se encuentra una carga negativa $-Q$ que compense la carga $+Q$ de la superficie exterior de la esfera interior. Debemos preguntarnos entonces, de dónde provienen dichas cargas negativas? Para responder esta pregunta tenemos que considerar que el material que compone el metal del cascarón está formado por átomos que, si bien cada uno de ellos es eléctricamente neutro, están compuestos por partículas con cargas positivas y negativas. Además, los electrones de las capas exteriores en los átomos que componen los materiales metálicos no se encuentran ligados a dichos átomos, lo que les proporciona la capacidad de moverse dentro del material. Por lo tanto podemos concluir que las cargas negativas que se acumulan en la superficie interior del cascarón provienen de electrones desligados que provienen inicialmente de los átomos que forman el metal. Ahora, también debemos considerar que cada uno de estos electrones al migrar deja atrás una particula con carga positiva. Es decir que por cada partícula -q que encontramos en la cara interior del anillo debe existir otra carga +q, que llamaremos carga inducida, ubicada en otra región.

Sabemos también que $\vec{E} = 0$ dentro del cascarón, lo que impide que el exceso decarga positiva esté en el cuerpo del material. La única opción que nos queda entonces es que las cargas positivas se encuentren en su superficie exterior. Vemos ademas que la carga total en dicha superficie debe ser $+2Q$, que corresponde a la suma de la carga añadida originalmente y la carga inducida.

$3R < r$:

El campo en esta región del espacio será el producido por la carga neta encerrada por la esfera S_4, que es igual a $2Q$. Por lo tanto tenemos que:

$$\oiint_{S_4} E\ \hat{e}_r \cdot \hat{n}\ = \frac{2Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r \qquad \textit{Ec. 2}$$

Vemos que este resultado, análogamente a lo obtenido para la zona con $R < r < 2R$, corresponde con una carga $2Q$ centrada en O.

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy

Para obtener una representación de la dependencia del módulo del campo eléctrico en función de la posición, definimos la constante $k = R^2 4\pi\epsilon_0$ y la variable adimensionada $\left(\frac{r}{R}\right)^2$. En función de estas variables obtenemos el gráfico de la Figura 3.

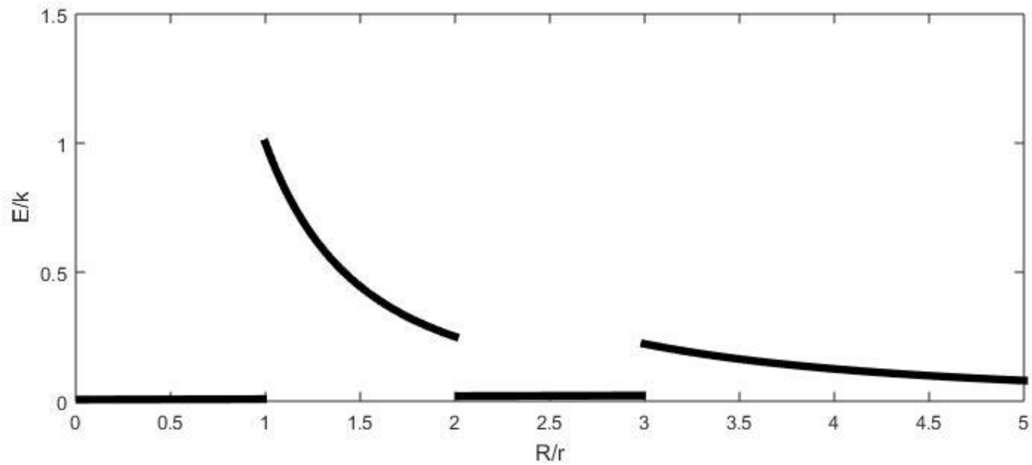

Figura 3: Dependencia espacial del módulo del campo eléctrico.

En esta figura podemos observar que el módulo del campo eléctrico es una magnitud que no necesariamente varía de forma continua con la posición. Puede probarse además que este tipo de discontinuidades se obtienen siempre que existan cargas acumuladas en una superficie.

Parte *c*

La diferencia de potencial eléctrico entre los puntos a y b está definida por la expresión:

$$\Delta V = V(r_b) - V(r_a) = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}'$$

Tomando además el punto a en el infinito y consideramos que el potencial en dicho punto es igual a 0 y renombrando $r_b = r$ se obtiene la función potencial

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}'$$

Donde la expresión de $\vec{E}$ en el caso que estamos analizando depende del punto del espacio considerado. Distinguimos cuatro regiones en el espacio, como se indica en la Figura 4.

En la región 1 el campo eléctrico es el determinado por la Ec. 2, por lo que tenemos que:

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2}\ \hat{e}_r \cdot d\vec{r}'$$

Resolviendo la integral se obtiene la expresión para $V(r)$ buscada:

$$V(r) = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2}\, dr' = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r} \Rightarrow V(r) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

A partir de este resultado vemos que las superficies equipotenciales del sistema en esta región son esferas centradas en O.

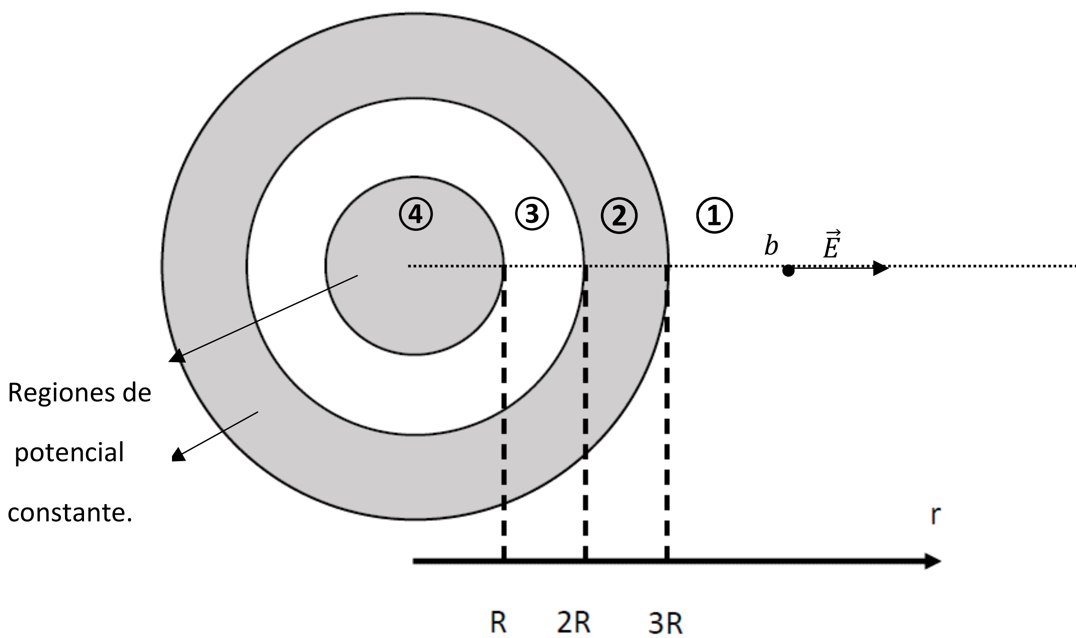

Figura 4

Como la Región ② está ocupada por el cascarón esférico, que sabemos es conductor, esta debe ser una equipotencial. Por lo tanto, simplemente evaluando la función potencial obtenida para la zona ① en $r = 3R$ obtenemos el potencial para toda la región. Haciendo esto obtenemos

$$V(r = 3R) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3R}$$

En la Región ③ tenemos un campo eléctrico dado por la Ec. 1, y además sabemos que el potencial en $r = 2R$ debe ser igual al potencial en el cascarón calculado en la parte anterior. Considerando todo esto obtenemos que en la región intermedia entre la esfera y el cascarón el potencial eléctrico es:

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy

$$V(r) - V(r = 2R) = -\int_{2R}^{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'^2}\ \hat{e}_r \cdot d\vec{r}'$$

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{2R}^{r} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right] + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3R}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2R} + \frac{2}{3R}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{6R}\right]$$

Zona ④: Al igual que en ②, esta zona corresponde a un conductor y por lo tanto debe ser una equipotencial. Para calcular el valor del potencial evaluamos la expresión para el potencial $V(r)$ calculada en $r = R$, es decir en la superficie de la esfera con lo que obtenemos.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{6R}\right] = \frac{7Q}{24\pi\epsilon_0 R}$$

Ahora, para comprobar el resultado obtenido debemos recordar que la función potencial debe cumplir que $\vec{E} = -\nabla V$, y que además el gradiente de una función $f(r, \theta, \phi)$ en coordenadas esféricas tiene la forma:

$$\nabla f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\ sen(\theta)}\ \frac{\partial f}{\partial \phi}\ \hat{e}_\phi$$

Por lo tanto, calculando el opuesto del gradiente de las expresiones para $V(r)$ obtenidas para cada región es fácil ver que se recuperan las expresiones para el campo eléctrico en cada una de las regiones calculadas en la parte *b*. En particular, observamos que en las regiones donde la función potencial es constante el campo eléctrico es nulo.

Parte *d*:

Al conectar la esfera y el cascarón con un cable, también conductor, todo el sistema debe quedar al mismo potencial. Para que el sistema alcance dicho estado de equilibrio se debe producir una migración de cargas. En este caso en particular lo que sucederá es que se establecerá una corriente eléctrica (circulación de cargas por un conductor) que redistribuirá las cargas en los conductores. Ya que todos los puntos de los dos conductores están al mismo potencial, la integral del campo eléctrico en cualquier camino entre dos puntos dentro de la esfera de radio 3R debe ser nulo. Esto quiere decir que el campo es nulo en el volumen contenido por la esfera de radio 3R. La carga neta 2Q entonces se redistribuye en la superficie de radio 3R.

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy

Parte *e*:

Con la nueva configuración del sistema la carga neta dentro del conductor (ahora formado por el sistema esfera, cable y cascarón esférico) es cero, por lo que también se cumple que en su interior $\vec{E} = 0$.

Ahora, fuera del cascarón esférico, es decir cuando $r > 3R$, la carga neta encerrada continúa siendo $2Q$ distribuida uniformemente sobre su superficie exterior. Por esta razón el campo eléctrico en esta región del espacio continúa siendo la misma que la calculada en la Parte b (Ec. 2). Esto implica además que el potencial calculado en esta región del espacio continúa siendo igual al calculado en la zona ① parte C.

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy