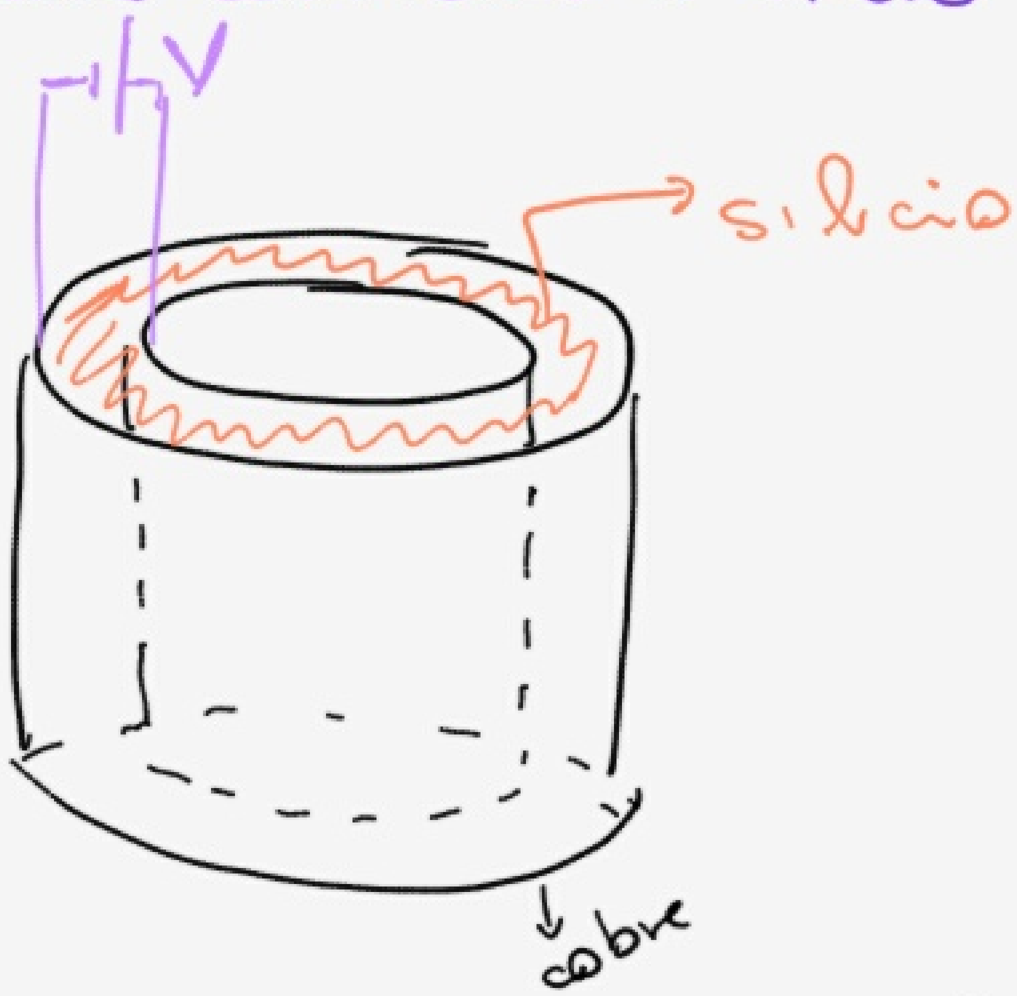
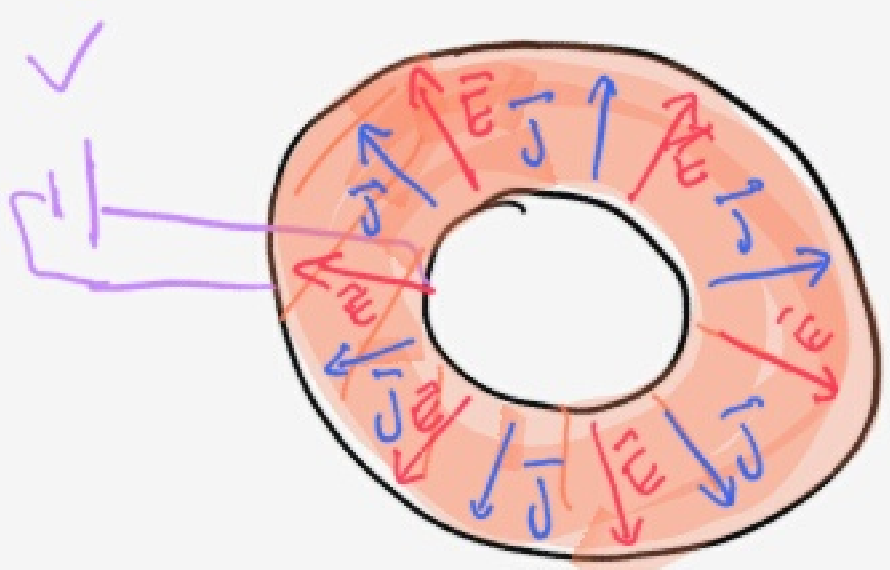
Ejercicio 7 Práctico 5.

Un cilindro de cobre de radio $\overbrace{1{,}0\text{ cm}}^{R_{int}}$ y largo $\overbrace{5\text{cm}}^{L}$ está revestido con dos capas: una capa de silicio de $\delta = 1\times10^{-6}$ m de espesor y de resistividad $\rho = 6.4\times10^{2}\ \Omega m$, recubierta con una segunda capa de cobre, como indica el diagrama. Cuando se establece una ΔV entre el cilindro interior y el exterior fluye una corriente a través del silicio. ¿Cuánto vale la resistencia de la capa de silicio?



obs: como los cilindros (en negro) de cobre son conductores, si no tuviéramos silicio (también conductor) se comportaría como un capacitor. Al rellenarlo de silicio conductor y con cierta resistividad actúa como una resistencia



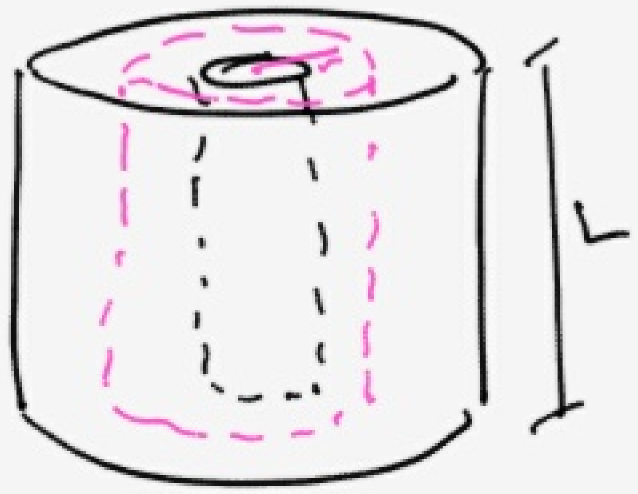
La diferencia de potencial aplicada entre el cilindro interno y externo hace que haya un campo eléctrico radial desde la placa interna a la externa. Como el silicio es conductor se genera una corriente. En particular una densidad de corriente también radial saliente

(obs: Hay varios buenos caminos para resolver este ejercicio.)

como el silicio es óhmico $\quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad$ con $\sigma =$ conductividad $= 1/\rho$

La corriente a través de una superficie es el flujo de la densidad de corriente

$R_{int} < r < R_{ext}$



$$i = \int_{\square} \vec{J}\cdot\underset{\substack{\downarrow \\ \text{radial saliente}}}{\hat{n}}\, da = \int_{\square} \sigma\, \underbrace{\vec{E}\cdot\hat{n}}_{E(r)\underbrace{\cos\theta}_{1}}\, da = \sigma \int_{\substack{\text{cilindro} \\ \text{rosado}}} E(r)\, da$$

$$= \sigma E(r)\, \underbrace{\text{Área del cilindro}}_{2\pi r L}$$

$$= \sigma\, 2\pi r L\, E(r) \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{i}{2\pi\sigma L r}}$$

$$V = -\int_{R_{ext}}^{R_{int}} E(r)\, dr = -\int_{R_{int}+\delta}^{R_{int}} E(r)\, dr = -\int_{R_{int}+\delta}^{R_{int}} \frac{i}{2\pi\sigma L r}\, dr$$

$$= \frac{i}{2\pi\sigma L}\left(-\int_{R_{int}+\delta}^{R_{int}} \frac{1}{r}\, dr\right) = \frac{i}{2\pi\sigma L} \operatorname{Log}\left(\frac{R_{int}+\delta}{R_{int}}\right)$$

La resistencia $R = \dfrac{V}{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{2\pi\sigma L} \operatorname{Log}\left(\frac{R_{int}+\delta}{R_{int}}\right)}$