Práctico 2
Lógica Proposicional

Ejercicio 4

$$(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)))$$

Demostración usando el PIP para $\texttt{PROP}$ en ψ.
Identificación de la propiedad:

$$P(\psi) := (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

Paso Base 1

T) $P(p_i) : (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } p_i \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_{p_i})(\varphi \in s))$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de $\texttt{PROP}$ que es subfórmula de p_i.
Por la definición de subfórmula la única posible subfórmula de una letra proposicional es la misma letra proposicional.
Por lo tanto $\varphi = p_i$. ***(I)***

Sea $s \in secFORM_{p_i}$, por la definición de secuencia de formación de p_i es posible asegurar que el último elemento de s es p_i. Por lo demostrado en ***(I)*** es igual a φ, por lo tanto podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Paso Base 2

T) $P(\bot) : (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \bot \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_{\bot})(\varphi \in s))$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de $\texttt{PROP}$ que es subfórmula de $\bot$.
Por la definición de subfórmula la única posible subfórmula de $\bot$ es $\bot$.
Por lo tanto $\varphi = \bot$. ***(II)***

Sea $s \in secFORM_{\bot}$, por la definición de secuencia de formación de $\bot$ es posible asegurar que el último elemento de s es $\bot$. Por lo demostrado en ***(II)*** es igual a φ, por lo tanto podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Paso Inductivo 1

H) $P(\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_1 \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_{\psi_1})(\varphi \in s))$

T) $P((\neg\psi_1)) : (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } (\neg\psi_1) \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_{(\neg\psi_1)})(\varphi \in s))$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de $(\neg\psi_1)$.
Por la definición de subfórmula hay dos casos posibles:

Caso 1 $\varphi = (\neg\psi_1)$

Sea $s \in secFORM_{(\neg\psi_1)}$, por la definición de secuencia de formación de $(\neg\psi_1)$ es posible asegurar que el último elemento de s es $(\neg\psi_1)$.

Como estamos en el caso de $\varphi = (\neg\psi_1)$ podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Caso 2 φ es subfórmula de ψ_1

Sea $s \in secFORM_{(\neg\psi_1)}$.
Por la definición de secuencia de formación sabemos que en ψ_1 ocurre en s.

Sea s_1 el prefijo de s que termina en ψ_1. Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que $s_1 \in secFORM\psi_1$.

En resumen:
φ es subfórmula de ψ_1, $s_1 \in secFORM\psi_1$ por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que $\varphi \in s_1$. ***(A)***
Por construcción s_1 es un prefijo de s. ***(B)***
Por ***(A)*** y ***(B)*** podemos afirmar que: $\varphi \in s$.

Paso Inductivo 2

H) $P(\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_1 \Rightarrow (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi_1})(\varphi \in s))$
$P(\psi_2) : (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_2 \Rightarrow (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi_2})(\varphi \in s))$

T) $P((\psi_1 {*} \psi_2)) : (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } (\psi_1 {*} \psi_2) \Rightarrow (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\psi_1 * \psi_2)})(\varphi \in s))$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de $(\psi_1 * \psi_2)$.
Por la definición de subfórmula hay tres casos posibles:

Caso 1 $\varphi = (\psi_1 * \psi_2)$

Sea $s \in secFORM_{(\psi_1 * \psi_2)}$, por la definición de secuencia de formación de $(\psi_1 {*} \psi_2)$ es posible asegurar que el último elemento de s es $(\psi_1 * \psi_2)$.

Como estamos en el caso de $\varphi = (\psi_1 * \psi_2)$ podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Caso 2 φ es subfórmula de ψ_1

Sea $s \in secFORM_{(\psi_1 * \psi_2)}$.
Por la definición de secuencia de formación sabemos que en ψ_1 ocurre en s.

Sea s_1 el prefijo de s que termina en ψ_1. Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que $s_1 \in secFORM\psi_1$.

En resumen:
φ es subfórmula de ψ_1, $s_1 \in secFORM\psi_1$ por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que $\varphi \in s_1$. ***(A)***
Por construcción s_1 es un prefijo de s. ***(B)***
Por ***(A)*** y ***(B)*** podemos afirmar que: $\varphi \in s$.

Caso 3 φ es subfórmula de ψ_2

Por la definición de secuencia de formación sabemos que en ψ_2 ocurre en s.

Sea s_1 el prefijo de s que termina en ψ_2. Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que $s_1 \in secFORM\psi_2$.

En resumen:
φ es subfórmula de ψ_2, $s_1 \in secFORM\psi_2$ por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que $\varphi \in s_1$. ***(A)***
Por construcción s_1 es un prefijo de s. ***(B)***
Por ***(A)*** y ***(B)*** podemos afirmar que: $\varphi \in s$.

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para $\mathtt{PROP}$, podemos afirmar que

$$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP})((\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)))$$

Lema 1

H) Sea $\varphi \in \mathtt{PROP}$,
$s \in secFORM_{\varphi}$ tal que $\psi \in s$ y
s' prefijo de s que termina ψ.

T) $s' \in secFORM_{\psi}$

Demo.

Demostraremos que s' cumple las condiciones para pertenecer a $secFORM_{\psi}$:

- Todos los elementos de s' son palabras de $\Sigma^*_{\mathtt{PROP}}$ por ser elementos de s y s ser una secuencia de formación de φ.
- Por construcción s' tiene como último elemento a ψ.
- Por ser elementos de s, los elementos de s' (α_k) son de alguna de las siguientes formas:
  - Atómicos - no hay restricciones sobre ellos.
  - $\alpha_k = (\alpha_i * \alpha_j)$, con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $i < k, j < k$, y tanto α_i, como α_j ocurren en s' ya que son menores a k y por construcción s' tiene todos los elementos de s hasta ψ.

- $\alpha_k = (\neg\alpha_i)$, con $i < k$. De forma análoga a la anterior se puede afirmar que $\alpha_i \in s'$.

Se han verificado todas las condiciones de la definición de secuencia de formación para ψ por lo tanto se cumple la tesis.

Ejercicio 6

a. I Si $\varphi \in \texttt{PROP}$ entonces $\langle\varphi,\varphi\rangle \in$ SUBF
   II Si $\langle\varphi,\psi\rangle \in$ SUBF, entonces $\langle\varphi,(\neg\psi)\rangle \in$ SUBF
   III Si $\langle\varphi,\psi\rangle \in$ SUBF y $\alpha \in$ PROP, entonces $\langle\varphi,(\psi * \alpha)\rangle \in$ SUBF, $* \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$
   IV Si $\langle\varphi,\psi\rangle \in$ SUBF y $\alpha \in$ PROP, entonces $\langle\varphi,(\alpha * \psi)\rangle \in$ SUBF, $* \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

b. Enunciado del PIP para SUBF:

H) Sea P una propiedad sobre los elementos de SUBF que cumple:

I. Para todo $\varphi \in$ PROP, $P(\langle\varphi,\varphi\rangle)$.

II. Para todo $\langle\varphi,\psi\rangle \in$ SUBF,
Si $P(\langle\varphi,\psi\rangle)$ entonces $P(\langle\varphi,(\neg\psi)\rangle)$

III. Para todo $\langle\varphi,\psi\rangle \in$ SUBF, $\alpha \in$ PROP y $* \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$
Si $P(\langle\varphi,\psi\rangle)$ entonces $P(\langle\varphi,(\psi * \alpha)\rangle$

IV. Para todo $\langle\varphi,\psi\rangle \in$ SUBF, $\alpha \in$ PROP y $* \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$
Si $P(\langle\varphi,\psi\rangle)$ entonces $P(\langle\varphi,(\alpha * \psi)\rangle$

T) Entonces es posible afirmar que P se cumple para todos los elementos de SUBF.

c. Lo que se quiere probar es:

$$(\bar{\forall}\,\langle\varphi,\psi\rangle \in \text{SUBF})((\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

Demostración usando el PIP para SUBF.

Identificación de la propiedad:

$$P(\langle\varphi,\psi\rangle) := (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$$

PASO BASE

T) $P(\langle\varphi,\varphi\rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\varphi})(\varphi \in s)$

Demo.

Sea s una secuencia de formación de φ cualquiera.
Por definición de secuencia de formación de φ, podemos afirmar que el último elemento de s es φ.

$$s \in secFORM_{\varphi}$$
$$\Rightarrow \text{(Definición de sec. de formación de } \varphi)$$
$$\varphi \in s$$

PASO INDUCTIVO 1

H) $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

T) $P(\langle \varphi, (\neg\psi) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\neg\psi)})(\varphi \in s)$

Demo.

Sea s una secuencia de formación de $\neg\psi$ cualquiera. Por definición de secuencia de formación es posible afirmar que $\psi \in s$.

Sea s' el prefijo de s que termina en ψ. Por lo demostrado en el Lema 1 es posible afirmar que $s' \in secFORM_{\psi}$, luego:

$$\begin{array}{l} s' \in secFORM_{\psi} \\ \Rightarrow (\textbf{Hipótesis Inductiva}) \\ \varphi \in s' \\ \Rightarrow (s' \text{ es prefijo de } s) \\ \varphi \in s \end{array}$$

PASO INDUCTIVO 2

H) $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$.

T) $P(\langle \varphi, (\psi * \alpha) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\psi*\alpha)})(\varphi \in s)$

Demo.

Sea s una secuencia de formación de $(\psi * \alpha)$ cualquiera. Por definición de secuencia de formación es posible afirmar que $\psi \in s$.

Sea s' el prefijo de s que termina en ψ. Por lo demostrado en el Lema 1 es posible afirmar que $s' \in secFORM_{\psi}$, luego:

$$\begin{array}{l} s' \in secFORM_{\psi} \\ \Rightarrow (\textbf{Hipótesis Inductiva}) \\ \varphi \in s' \\ \Rightarrow (s' \text{ es prefijo de } s) \\ \varphi \in s \end{array}$$

PASO INDUCTIVO 3

H) $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

T) $P(\langle \varphi, (\alpha * \psi) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\alpha*\psi)})(\varphi \in s)$

Demo.

A cargo del estudiante.

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para SUBF, podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall} \langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF})((\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

Ejercicio 7

a. **Hipótesis** Sea $s = \varphi_1, ..., \varphi_{i-1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}, ..., \varphi_n$ tal que $s \in secFORM_{\psi}$,
$\varphi_i \in s$ y es la fórmula más a a derecha en s que cumple $\varphi_i \notin sub(\psi)$,
$s_1 = \varphi_1, ..., \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, ..., \varphi_n$ (se obtiene de s eliminando φ_i)

Tesis $s_1 \in secFORM_{\psi}$

Demo .

Probaremos que s_1 cumple las propiedades de la definición de secuencia de formación de ψ.

- (Símbolos válidos) Dado que $s \in secFORM_\psi$ sabemos que todos sus elementos son válidos para una secuencia de formación. Como los elementos de s_1 están incluídos en los de s sabemos que estos también son válidos para una secuencia de formación.

- (Último elemento) Dado que $\varphi_1, ..., \varphi_i, ..., \varphi_n \in secFORM_\psi$, sabemos por definición de secuencia de formación de ψ que $\varphi_n = \psi$. Además, por hipótesis φ_i no es subfórmula de ψ. Entonces necesariamente $\varphi_i \neq \psi$ de donde s_1 cumple que su último elemento es ψ, dado que tiene los mismos elementos que s menos φ_i y este es distinto a ψ.

- (Elementos anteriores a φ_i) Los elementos que ocurren antes que φ_i en s cumplen todas las propiedades de la definición de secuencia de formación de ψ y como son los mismos en s_1 también lo hacen en esta secuencia. Observar que las propiedades que debe cumplir un elemento dado de la secuencia son siempre sobre elementos anteriores en la misma.

- (Elementos posteriores a φ_i) Resta ver que no existe una φ_k con $k > i$ que viole las condiciones de la definición de secuencia de formación. Si una tal φ_k existiera, esta no podría ser atómica dado que estas fórmulas cumplen la condición de secuencia de formación.
  Supongamos que $\varphi_k = \neg\varphi_i$. Como φ_i es la fórmula más a la derecha en la secuencia que no es subfórmula de ψ, sabemos que para todo $j > i$, φ_j es subfórmula de ψ. En particular, φ_k es subfórmula de ψ y por definición de subfórmula junto con la propiedad transitiva probada antes, tenemos que φ_i debe ser también subfórmula de ψ, que es absurdo.
  Supongamos ahora que $\varphi_k = \varphi_i * \delta$ con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Observamos que no se pierde generalidad al asumir que φ_i es la fórmula a la izquierda del conectivo binario. Análogamente al caso anterior, tenemos que φ_k es subfórmula de ψ y por tanto φ_i debe ser también subfórmula de ψ, que es absurdo.

b. La demostración se realiza por absurdo.
Sea s una secuencia de formación de largo mínimo de ψ tal que φ ocurre en s. Supongamos que φ no es subfórmula de ψ. Entonces sabemos que existe una fórmula φ_j que no es subfórmula de ψ y aparece más a la derecha en la secuencia s. Luego, por la parte a) tenemos que $s' = s \setminus \{\varphi_j\}$ es secuencia de formación de ψ, contradiciendo esto el hecho de que s es de largo mínimo.

Ejercicio 8

a,b

$$\begin{aligned} r &: \texttt{PROP} \to \mathbb{N} \\ r(p_i) &= 0,\ \text{con } p_i \in P \\ r(\bot) &= 0 \\ r((\varphi * \psi)) &= 1 + max\{r(\varphi), r(\psi)\} \\ r((\neg\varphi)) &= 1 + r(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} con &: \texttt{PROP} \to \mathbb{N} \\ con(p_i) &= 0,\ \text{con } p_i \in P \\ con(\bot) &= 1 \\ con((\varphi * \psi)) &= 1 + con(\varphi) + con(\psi) \\ con((\neg\varphi)) &= 1 + con(\varphi) \end{aligned}$$

c

I. **FALSO.**
Si $\varphi = \bot$
$r(\bot) = 0 < 1 = con(\bot)$

II. **FALSO.**
Si $\varphi = p_1$
$r(p_1) = 0 = con(p_i)$

III. **VERDADERO.**
Hay que probar $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}) r(\varphi) \leq con(\varphi)$

Demostración usando el PIP para $\texttt{PROP}$ en φ.
Identificación de la propiedad:

$$P(\varphi) := r(\varphi) \leq con(\varphi)$$

Paso Base 1

T) $P(p_i) : r(p_i) \leq con(p_i)$
Demo.
por definiciones de r y con
$r(p_i) = 0 = con(p_i)$

Paso Base 2

T) $P(\bot) : r(\bot) \leq con(\bot)$
Demo.
por definiciones de r y con
$r(\bot) = 0 \leq 1 = con(\bot)$

Paso Inductivo 1

H) $P(\varphi) : r(\varphi) \leq con(\varphi)$
T) $P((\neg\varphi)) : r((\neg\varphi)) \leq con((\neg\varphi))$
Demo.
Por hipótesis inductiva
$r(\varphi) \leq con(\varphi)$
$\Leftrightarrow$ (por aritmética)
$r(\varphi) + 1 \leq con(\varphi) + 1$
$\Leftrightarrow$ (por def r y con)
$r((\neg\varphi)) \leq con((\neg\varphi))$

Paso Inductivo 2

H) $P(\varphi_1) : r(\varphi_1) \leq con(\varphi_1)$
$P(\varphi_2) : r(\varphi_2) \leq con(\varphi_2)$

T) $P((\varphi_1 * \varphi_2)) : r((\varphi_1 * \varphi_2)) \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$

Demo.

Por hipótesis inductiva y aritmética

$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) \leq con(\varphi_1) + con(\varphi_2)$

$\Leftrightarrow$ (por aritmética)

$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \leq con(\varphi_1) + con(\varphi_2) + 1$

$\Leftrightarrow$ (por def con)

$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$

$\Rightarrow$ ($max\{r(\varphi_1), r(\varphi_2)\} \leq r(\varphi_1) + r(\varphi_2)$)

$max\{r(\varphi_1), r(\varphi_2)\} + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$

$\Leftrightarrow$ (por def r)

$r((\varphi_1 * \varphi_2)) + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP, podemos afirmar que $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}) r(\varphi) \leq con(\varphi)$

Ejercicio 11

a. I $p_0 \in \texttt{PROP'}$
II $p_1 \in \texttt{PROP'}$
III Si $\varphi \in \texttt{PROP'}$ entonces $(\neg\varphi) \in \texttt{PROP'}$
IV Si $\varphi \in \texttt{PROP'}$ y $\psi \in \texttt{PROP'}$ entonces $(\varphi \to \psi) \in \texttt{PROP'}$

b. Dada la definición de POSF :

I $p_0 \in \texttt{POSF}$
II $p_1 \in \texttt{POSF}$
III Si $\varphi \in \texttt{POSF}$ entonces $\varphi\neg \in \texttt{POSF}$
IV Si $\varphi \in \texttt{POSF}$ y $\psi \in \texttt{POSF}$ entonces $\varphi\ \psi \to\ \in \texttt{POSF}$

$$
\begin{aligned}
f &: \texttt{POSF} \to \texttt{PROP'} \\
f(p_0) &= p_0 \\
f(p_1) &= p_1 \\
f(\varphi\neg) &= (\neg f(\varphi)) \\
f(\varphi\psi\to) &= (f(\varphi) \to f(\psi))
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f^{-1} &: \texttt{PROP'} \to \texttt{POSF} \\
f^{-1}(p_0) &= p_0 \\
f^{-1}(p_1) &= p_1 \\
f^{-1}((\neg\varphi)) &= f^{-1}(\varphi)\neg \\
f^{-1}((\varphi \to \psi)) &= f^{-1}(\varphi)f^{-1}(\psi)\to
\end{aligned}
$$

c.

$$
\begin{aligned}
g &: \texttt{POSF} \to \texttt{PROP'} \\
g(p_0) &= p_0 \\
g(p_1) &= p_1 \\
g(\varphi\neg) &= (\neg g(\varphi)) \\
g(\varphi\psi\to) &= (g(\psi) \to g(\varphi))
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
g^{-1} &: \texttt{PROP'} \to \texttt{POSF} \\
g^{-1}(p_0) &= p_0 \\
g^{-1}(p_1) &= p_1 \\
g^{-1}((\neg\varphi)) &= g^{-1}(\varphi)\neg \\
g^{-1}((\varphi \to \psi)) &= g^{-1}(\psi)g^{-1}(\varphi)\to
\end{aligned}
$$

d. La propiedad a demostrar es:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

Se demuestra por inducción en `POSF`.

Identificación de la propiedad:

$$P(\varphi) := f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

PASO BASE

T) $\bar{\forall} i \in \{0,1\}, \quad P(p_i) : f^{-1}(g(p_i)) = g^{-1}(f(p_i))$

Demo.

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(g(p_i)) \\
& = \text{(definición de } g\text{)} \\
& f^{-1}(p_i) \\
& = \text{(definición de } f^{-1}\text{)} \\
& p_i \\
& = \text{(definición de } g^{-1}\text{)} \\
& g^{-1}(p_i) \\
& = \text{(definición de } f\text{)} \\
& g^{-1}(f(p_i))
\end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO 1

H) $P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$

T) $P(\varphi\neg) : f^{-1}(g(\varphi\neg)) = g^{-1}(f(\varphi\neg))$

Demo.

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(g(\varphi\neg)) \\
& = \text{(definición de } g\text{)} \\
& f^{-1}((\neg g(\varphi))) \\
& = \text{(definición de } f^{-1}\text{)} \\
& f^{-1}(g(\varphi))\neg \\
& = (\textbf{Hipótesis Inductiva}) \\
& g^{-1}(f(\varphi))\neg \\
& = \text{(definición de } g^{-1}\text{)} \\
& g^{-1}((\neg f(\varphi))) \\
& = \text{(definición de } f\text{)} \\
& g^{-1}(f(\varphi\neg))
\end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO 2

H) $P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$
$P(\psi) : f^{-1}(g(\psi)) = g^{-1}(f(\psi))$

T) $P(\varphi\psi \rightarrow) : f^{-1}(g(\varphi\psi\rightarrow)) = g^{-1}(f(\varphi\psi\rightarrow))$

Demo.

$f^{-1}(g(\varphi\psi{\rightarrow}))$
$=$ (definición de g)
$f^{-1}((g(\psi) \rightarrow g(\varphi)))$
$=$ (definición de f^{-1})
$f^{-1}(g(\psi))f^{-1}(g(\varphi)){\rightarrow}$
$=$ (**Hipótesis Inductiva**)
$g^{-1}(f(\psi))g^{-1}(f(\varphi)){\rightarrow}$
$=$ (definición de g^{-1})
$g^{-1}(((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)))$
$=$ (definición de f)
$g^{-1}(f(\varphi\psi{\rightarrow}))$

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para `POSF`, podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{POSF})f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

e.

$f(\varphi) = g(\psi)$ $\Leftrightarrow$ (Aplicación de f^{-1})
$f^{-1}(f(\varphi)) = f^{-1}(g(\psi))$ $\Leftrightarrow$ (Composición de una función con su inversa es la id)
$\varphi = f^{-1}(g(\psi))$ $\Leftrightarrow$ (**Por parte d**)
$\varphi = g^{-1}(f(\psi))$ $\Leftrightarrow$ (Aplicación de g)
$g(\varphi) = g(g^{-1}(f(\psi)))$ $\Leftrightarrow$ (Composición de una función con su inversa es la id)
$g(\varphi) = f(\psi)$ $\Leftrightarrow$ (Commutativa)
$f(\psi) = g(\varphi)$