Esfera aislada

Podemos asignar una capacitancia a un conductor individual aislado si suponemos que la "placa faltante" es una esfera conductora de radio infinito. Al fin y al cabo, las líneas de campo que salen de la superficie de un conductor aislado cargado deben terminar en alguna parte; las paredes del salón en que esté alojado el conductor pueden servir, efectivamente, como nuestra esfera de radio infinito.

Si hacemos que $b \to \infty$ en la ecuación 13 y sustituimos a a por R, hallamos

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \qquad \text{(esfera aislada).} \qquad (14)$$

Al comparar las ecuaciones 7, 10, 13 y 14, notamos que C se expresa siempre como ϵ_0 multiplicada por una cantidad con dimensión de longitud. Las unidades de ϵ_0(F/m) son consistentes con esta relación.

Problema muestra 2 Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas por una distancia $d = 1.0$ mm. ¿Cuál debe ser el área de la placa si la capacitancia ha de ser de 1.0 F?

Solución De la ecuación 7 tenemos

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}} = 1.1 \times 10^8\ \text{m}^2.$$

Ésta es el área de un cuadrado de más de 10 km de lado. El farad es en verdad una unidad grande. Sin embargo, la tecnología moderna ha permitido la construcción de capacitores de 1 F de tamaño muy reducido. Estos "supercapacitores" se usan como fuentes de voltaje de soporte para computadoras; pueden mantener la memoria de la computadora hasta por 30 días en caso de una falla de energía eléctrica.

Problema muestra 3 El espaciamiento entre los conductores de un cable coaxial largo, usado para transmitir señales de TV, tiene un radio interior $a = 0.15$ mm y un radio exterior $b = 2.1$ mm. ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud de este cable?

Solución De la ecuación 10 tenemos

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} = \frac{(2\pi)(8.85\ \text{pF/m})}{\ln(2.1\ \text{mm}/0.15\ \text{mm})} = 21\ \text{pF/m}.$$

Problema muestra 4 ¿Cuál es la capacitancia de la Tierra considerada como una esfera conductora aislada de 6370 km de radio?

Solución De la ecuación 14 tenemos

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = (4\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(6.37 \times 10^6\ \text{m})$$
$$= 7.1 \times 10^{-4}\ \text{F} = 710\ \mu\text{F}.$$

Un diminuto *Supercap* ("supercapacitor") de 1 F tiene una capacitancia que es de alrededor de 1400 veces más grande que aquélla de la Tierra.

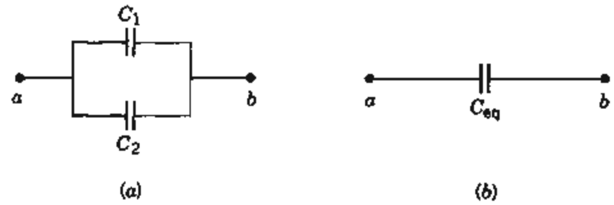

Figura 5 (*a*) Dos capacitores en paralelo. (*b*) La capacitancia equivalente que puede reemplazar a la combinación en paralelo.

31-3 CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO

Al analizar circuitos eléctricos, es deseable conocer la *capacitancia equivalente* de dos o más capacitores que estén conectados de un cierto modo. Por "capacitancia equivalente" queremos significar la capacitancia de un capacitor individual que puede sustituirse por la combinación sin que cambie la operación del resto del circuito. En un circuito eléctrico, un capacitor se representa por el símbolo ⊣⊢, el cual, aunque parezca un capacitor de placas paralelas, representa a cualquier tipo de capacitor.

Capacitores conectados en paralelo

La figura 5*a* muestra dos capacitores conectados *en paralelo*. Existen tres propiedades que caracterizan a una conexión en paralelo de los elementos de un circuito. (1) Al viajar de a a b, podemos tomar cualquiera de varias trayectorias *paralelas* (dos, en este caso) cada una de las cuales pasa por ***sólo uno*** de los elementos en paralelo. (2) Cuando se conecta una batería de diferencia de potencial V entre las terminales de la combinación (es decir, las puntas de la batería están conectadas a los puntos a y b en la Fig. 5), en cada elemento de la conexión en paralelo aparece la misma diferencia de potencial V. Los alambres y las placas del capacitor son conductores y por lo tanto equipotenciales. El potencial en a aparece en los alambres conectados a a y en las dos placas de capacitor a la izquierda; similarmente, el potencial en b aparece en todos los alambres conectados a b y a las dos placas de capacitor a la derecha. (3) Los elementos comparten la carga total que la batería proporciona a la combinación.

Sin perder de vista estos principios, podemos ahora hallar la capacitancia equivalente C_{eq} que da la misma capacitancia total entre los puntos a y b, como se indica en la figura 5*b*. Suponga una batería de diferencia de potencial V conectada entre los puntos a y b. Para cada capacitor, podemos escribir (usando la Ec. 1)

$$q_1 = C_1 V \quad \text{y} \quad q_2 = C_2 V. \qquad (15)$$

Al escribir estas ecuaciones hemos empleado el mismo valor de la diferencia de potencial entre las terminales de los capacitores, de acuerdo con la segunda característica de una conexión en paralelo previamente estipulada. La batería extrae la carga q de un lado del circuito y la mueve hacia el otro lado. Esta carga la comparten los dos elementos de acuerdo con la tercera característica, de modo que la suma de las cargas de los dos capacitores es igual a la carga total:

$$q = q_1 + q_2. \tag{16}$$

Si la combinación en paralelo fuese reemplazada por un solo capacitor C_{eq} y conectada a la misma batería, el requisito de que el circuito opere de un modo idéntico significaría que la batería debe transferir la misma carga q. O sea, para el capacitor equivalente,

$$q = C_{eq}V. \tag{17}$$

Al sustituir la ecuación 16 en la ecuación 17, incorporando luego las ecuaciones 15 dentro del resultado, obtenemos

$$C_{eq}V = C_1V + C_2V,$$

o sea

$$C_{eq} = C_1 + C_2. \tag{18}$$

Si se tienen más de dos capacitores en paralelo, podemos primero reemplazar a C_1 y C_2 por su equivalente C_{12} determinado de acuerdo con la ecuación 18. Luego hallamos la capacitancia equivalente de C_{12} y el siguiente capacitor C_3 en paralelo. Si este proceso se continúa, podemos extender la ecuación 18 a cualquier número de capacitores conectados en paralelo:

$$C_{eq} = \sum_n C_n \quad \text{(combinación en paralelo).} \tag{19}$$

Es decir, para calcular la capacitancia equivalente de una combinación en paralelo, simplemente sumamos las capacitancias individuales. Nótese que la capacitancia equivalente es siempre mayor que la máxima capacitancia en la combinación en paralelo. La combinación en paralelo puede almacenar más carga que cualquiera de los capacitores individuales.

Capacitores conectados en serie

La figura 6 muestra dos capacitores conectados *en serie*. Existen tres propiedades que distinguen a una conexión en serie de los elementos de un circuito. (1) Si intentamos viajar de a a b, debemos pasar por *todos* los elementos del circuito *en sucesión*. (2) Cuando se conecta una batería entre la combinación, la diferencia de potencial V de la batería es igual a la suma de las diferencias de potencial entre cada uno de los elementos. (3) La carga q entregada a cada elemento de la combinación en serie tiene el mismo valor.

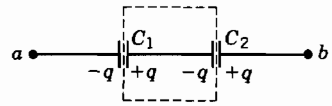

Figura 6 Combinación de dos capacitores en serie.

Para entender esta última propiedad, observemos la región de la figura 6 encerrada por la línea de trazos. Supongamos que la batería establece una carga $-q$ en la placa izquierda de C_1. Puesto que un capacitor contiene cargas iguales y opuestas en sus placas, una carga $+q$ aparece en la placa derecha de C_1. Pero el conductor en forma de H, encerrado dentro de la línea de trazos, está aislado eléctricamente del resto del circuito; al inicio no contiene ninguna carga neta, y no se le puede transferir ninguna carga. Si aparece una carga $+q$ en la placa derecha de C_1, entonces debe aparecer una carga $-q$ en la placa izquierda de C_2. Esto es, se mueven n ($= q/e$) electrones desde la placa derecha de C_1 hacia la placa izquierda de C_2. Si hubiese más de dos capacitores en serie, puede formularse un argumento semejante para toda la línea de capacitores, con el resultado de que la placa de la izquierda *en cada capacitor* de la conexión en serie contendrá una carga q de un signo, y que la placa derecha *de cada capacitor* de la conexión en serie contendrá una carga de igual magnitud q y de signo opuesto.

Podemos escribir para los capacitores individuales, usando la ecuación 1,

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \tag{20}$$

con la misma carga q en cada capacitor, pero distintas diferencias de potencial entre cada uno. De acuerdo con la segunda propiedad de una conexión en serie, tenemos

$$V = V_1 + V_2. \tag{21}$$

Buscamos la capacitancia equivalente C_{eq} que pueda reemplazar a la combinación, de modo que la batería proporcionaría la misma cantidad de carga:

$$V = \frac{q}{C_{eq}}. \tag{22}$$

Si se sustituye la ecuación 21 en la ecuación 22 e incluimos luego las ecuaciones 20, obtenemos

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

o sea

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{23}$$

Si tenemos varios capacitores en serie, podemos usar la ecuación 23 para determinar la capacitancia equivalente C_{12} de los primeros dos. Luego encontramos la capacitancia equivalente de C_{12} y el siguiente capacitor en serie C_3. Al continuar de esta manera, hallaremos la capacitancia equivalente de cualquier número de capacitores en serie,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_n \frac{1}{C_n} \qquad \text{(combinación en serie).} \quad (24)$$

Esto es, para calcular la capacitancia equivalente de una combinación en serie, tómese el recíproco de la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Nótese que la capacitancia equivalente de la combinación en serie es siempre menor que la más pequeña de las capacitancias individuales en la serie.

A veces, los capacitores están conectados de modo tal que no son inmediatamente identificables como combinaciones en serie o en paralelo. Como vemos en el problema muestra 5, tales combinaciones pueden a menudo (pero no siempre) dividirse en unidades más pequeñas que pueden analizarse como conexiones en serie o en paralelo.

Problema muestra 5 (*a*) Halle la capacitancia equivalente de la combinación mostrada en la figura 7*a*. Suponga que

$$C_1 = 12.0\,\mu\text{F}, \quad C_2 = 5.3\,\mu\text{F}, \quad \text{y} \quad C_3 = 4.5\,\mu\text{F}.$$

(*b*) En la figura 7*a* se aplica una diferencia de potencial de $V = 12.5$ V en las terminales. ¿Cuál es la carga en C_1?

Solución (*a*) Los capacitores C_1 y C_2 están en paralelo. De la ecuación 18, su capacitancia equivalente es

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0\,\mu\text{F} + 5.3\,\mu\text{F} = 17.3\,\mu\text{F}.$$

Como lo muestra la figura 7*b*, C_{12} y C_3 están en serie. De la ecuación 23, la combinación equivalente final (véase la figura 7*c*) se encuentra de

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17.3\,\mu\text{F}} + \frac{1}{4.5\,\mu\text{F}} = 0.280\,\mu\text{F}^{-1},$$

o sea

$$C_{123} = \frac{1}{0.280\,\mu\text{F}^{-1}} = 3.57\,\mu\text{F}.$$

(*b*) Tratamos a los capacitores equivalentes C_{12} y C_{123} exactamente como si fuesen capacitores reales de la misma capacitancia. La carga en C_{123} en la figura 7*c* es, entonces,

$$q_{123} = C_{123}V = (3.57\,\mu\text{F})(12.5\text{ V}) = 44.6\,\mu\text{C}.$$

Esta misma carga existe en cada capacitor en la combinación en serie de la figura 7*b*. La diferencia de potencial en C en esa figura es, entonces,

$$V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6\,\mu\text{C}}{17.3\,\mu\text{F}} = 2.58\text{ V}.$$

Esta misma diferencia de potencial aparece en C en la figura 7*a*, de modo que

$$q_1 = C_1V_1 = (12\,\mu\text{F})(2.68\text{ V}) = 31\,\mu\text{C}.$$

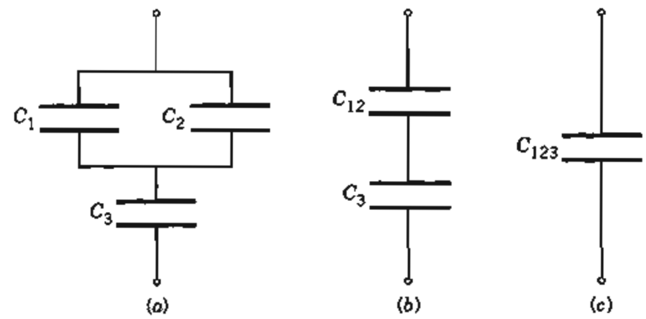

Figura 7 Problema muestra 5. (*a*) Combinación de tres capacitores. (*b*) La combinación en paralelo de C_1 y C_2 se ha reemplazado por su equivalente, C_{12}. (*c*) La combinación en serie de C_{12} y C_3 se ha reemplazado por su equivalente, C_{123}.

31-4 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Como se indicó en la introducción de este capítulo, un uso importante de los capacitores es el almacenamiento de energía electrostática en aplicaciones que van desde las lámparas de destello hasta los sistemas de láser (véase la Fig. 8), dependiendo ambas para su operación de la carga y descarga de capacitores.

En la sección 30-2 demostramos que cualquier configuración de carga tiene una cierta *energía potencial eléctrica U*, igual al trabajo *W* (que puede ser positivo o negativo) realizado por un agente externo que conjunte la configuración de carga a partir de sus componentes individuales, que originalmente se supuso estaban infinitamente separadas entre sí y en reposo. Esta energía potencial es semejante a la de los sistemas mecánicos, como un resorte comprimido o el sistema Tierra-Luna.

En un ejemplo simple, se realiza trabajo cuando dos cargas iguales y opuestas están separadas. Esta energía está almacenada como energía potencial eléctrica en el sistema, y puede recuperarse como energía cinética si se permite que las cargas se junten de nuevo. De modo semejante, un capacitor cargado tiene almacenada en él una energía potencial eléctrica *U* igual al trabajo *W* que el agente externo realiza cuando el capacitor se carga. Esta energía se recupera si se permite que el capacitor se descargue. Alternativamente, podemos visualizar el trabajo en el proceso de carga, al imaginarnos que el agente externo jala electrones de la placa positiva y los empuja hacia la placa negativa, lográndose así la separación de la carga. Por lo general, el trabajo en el proceso de carga lo realiza una batería, a costas de su energía química almacenada.

Supongamos que en un tiempo *t* se transfiere una carga *q'* de una placa a la otra. La diferencia de potencial *V'* entre