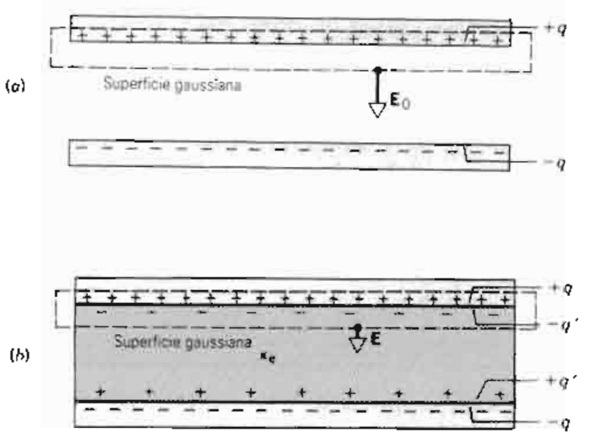

Figura 15 (*a*) Capacitor de placas paralelas. (*b*) Se inserta una lámina dieléctrica, mientras que la carga q en las placas permanece constante. En la superficie de la lámina dieléctrica aparece una carga inducida q'.

$$q' = q\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right). \quad (36)$$

Esto demuestra que la carga superficial inducida q' es siempre de menor magnitud que la carga libre q y es igual a cero si no hay un dieléctrico presente, es decir, si $\kappa_e = 1$.

Ahora escribiremos la ley de Gauss para el caso de la figura 15*b* en la forma

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q - q', \quad (37)$$

siendo de nuevo $q - q'$ la carga neta dentro de la superficie gaussiana. Si se sustituye de la ecuación 36 para q' se obtiene, después de reordenar

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q. \quad (38)$$

Esta importante relación, si bien obtenida para un capacitor de placas paralelas, es generalmente válida y es la forma en la cual suele escribirse la ley de Gauss cuando interviene la presencia de dieléctricos. Obsérvese lo siguiente:

1. La integral del flujo ahora contiene el factor $\kappa_e\mathbf{E}$ en lugar de $\mathbf{E}$. Esto es consistente con la *reducción* de E en un dieléctrico por el factor κ_e, porque $\kappa_e\mathbf{E}$ (dieléctrico presente) es igual a $\mathbf{E}_0$ (sin el dieléctrico). Con fines de generalizar, permitimos la posibilidad de que κ_e no sea constante al ponerla dentro de la integral.

2. Se considera que la carga q contenida dentro de la superficie gaussiana es *la carga libre únicamente*. En el miembro derecho de la ecuación 38 se omite deliberadamente la carga superficial inducida, que se tomó en cuenta al introducir κ_e en el miembro izquierdo. Las ecuaciones 37 y 38 son formulaciones completamente equivalentes.

Problema muestra 9 La figura 16 muestra un capacitor de placas paralelas de área A de la placa y separación d entre placas. Entre ellas se aplica una diferencia de potencial V_0. Entonces se desconecta la batería, y se coloca una lámina dieléctrica de espesor b y constante dieléctrica κ_e entre las placas, como se muestra. Suponga que

$$A = 115\ \text{cm}^2, \qquad d = 1.24\ \text{cm}, \qquad b = 0.78\ \text{cm},$$
$$\kappa_e = 2.61, \qquad V_0 = 85.5\ \text{V}.$$

(*a*) ¿Cuál es la capacitancia C_0 antes de insertar la lámina? (*b*) ¿Qué carga libre aparece en las placas? (*c*) ¿Cuál es el campo eléctrico E_0 en los espacios entre las placas y la lámina dieléctrica? (*d*) Calcule el campo eléctrico E en la lámina dieléctrica. (*e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas después de haber introducido la lámina? (*f*) ¿Cuál es la capacitancia con la lámina en su lugar?

Solución (*a*) De la ecuación 7 tenemos

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.55 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{1.24 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 8.21 \times 10^{-12}\ \text{F} = 8.21\ \text{pF}.$$

(*b*) La carga libre en las placas puede determinarse de la ecuación 1,

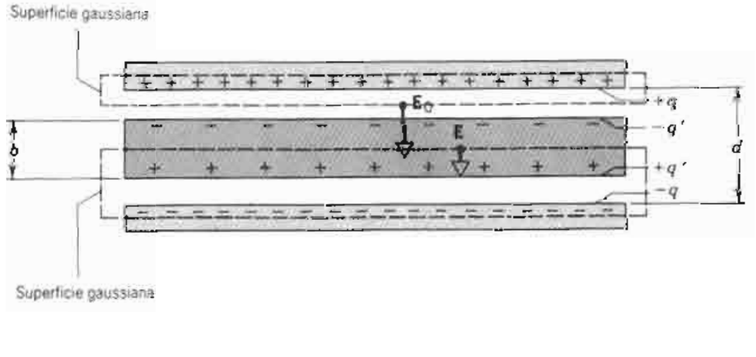

Figura 16 Problema muestra 9. Un capacitor de placas paralelas contiene un dieléctrico que llena sólo parcialmente el espacio entre las placas.

$$q = C_0 V_0 = (8.21 \times 10^{-12}\ \text{F})(85.5\ \text{V})$$
$$= 7.02 \times 10^{-10}\ \text{C} = 702\ \text{pC}.$$

Puesto que la batería de carga se desconectó antes de introducir la lámina, la carga libre permanece sin cambio cuando la lámina se pone en posición.

(*c*) Apliquemos la ley de Gauss en la forma dada en la ecuación 38 a la superficie gaussiana de arriba en la figura 16, la cual comprende sólo la carga libre en la placa superior del capacitor. Tenemos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 (1) E_0 A = q$$

o sea

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}$$
$$= 6900\ \text{V/m} = 6{,}90\ \text{kV/m}.$$

Nótese que ponemos $\kappa_e = 1$ en esta ecuación porque la superficie gaussiana, sobre la cual se integró la ley de Gauss, no pasa a través de ningún dieléctrico. Adviértase también que el valor de E_0 permanece sin cambio cuando se introduce la lámina. Sólo depende de la carga libre en las placas.

(*d*) Aplicamos una vez más la ecuación 38, esta vez a la superficie gaussiana inferior de la figura 16 e incluyendo únicamente la carga libre $-q$. Hallamos

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\epsilon_0 \kappa_e E A = -q$$

o sea

$$E = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{6.90\ \text{kV/m}}{2.61} = 2.64\ \text{kV/m}.$$

El signo menos aparece cuando evaluamos el producto punto $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ porque $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{A}$ están en direcciones opuestas, estando $d\mathbf{A}$ siempre en la dirección de la normal *hacia afuera* de la superficie gaussiana cerrada.

(*e*) Para determinar la diferencia de potencial, usamos la ecuación 6

$$V = \int_{+}^{-} E\, ds = E_0(d - b) + Eb$$
$$= (6900\ \text{V/m})(0.0124\ \text{m} - 0.0078\ \text{m})$$
$$+ (2640\ \text{V/m})(0.0078\ \text{m})$$
$$= 52.3\ \text{V}.$$

Esto contrasta con la diferencia de potencial, aplicada inicialmente, de 85.5 V.

(*f*) De la ecuación 1, la capacitancia con la lámina en posición es de

$$C = \frac{q}{V} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{52.3\ \text{V}}$$
$$= 1.34 \times 10^{-11}\ \text{F} = 13.4\ \text{pF}.$$

La tabla 2 resume los resultados de este problema muestra e incluye también los resultados que se habrían deducido si la lámina dieléctrica hubiese llenado completamente el espacio entre las placas.

TABLA 2 RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA MUESTRA 9

Cantidad		*Sin lámina*	*Lámina parcial*	*Lámina completa*
C	pF	8.21	13.4	21.4
q	pC	702	702	702
q'	pC	—	433	433
V	V	85.5	52.3	32.8
E_0	kV/m	6.90	6.90	6.90[a]
E	kV/m	—	2.64	2.64

[a] Se supone que existe un espacio sin ocupar muy pequeño.

PREGUNTAS

1. Un capacitor está conectado a una batería. (*a*) ¿Por qué cada placa recibe una carga de la misma magnitud exactamente? (*b*) ¿Es esto cierto aun cuando las placas son de tamaños diferentes?
2. Se dan dos capacitores, C_1 y C_2, en donde $C_1 > C_2$. ¿Cómo podrían disponerse las cosas de modo que C_2 pudiera contener más carga que C_1?
3. La relación $\sigma \propto 1/R$, en que σ es la densidad superficial de carga y R es el radio de curvatura (véase la Ec. 33 del capítulo 30) indica que la carga puesta en un conductor aislado se concentra en las puntas y evita las superficies planas, en donde $R = \infty$. ¿Cómo compaginamos esto con la figura 3, donde la carga está definitivamente en la superficie plana de cada placa?
4. En relación con la ecuación 1 ($q = CV$) decimos que C es una constante. Sin embargo hemos señalado (véase la Ec. 7) que depende de la geometría (y también, como lo veremos más adelante, del medio). Si C es realmente una constante, ¿con respecto a qué variables permanece constante?
5. En la figura 1, supongamos que a y b no son conductores, estando la carga arbitrariamente distribuida sobre sus superficies. (*a*) ¿Se cumpliría la ecuación 1 ($q = CV$), si C fuese independiente de la distribución de las cargas? (*b*) ¿Cómo definiría V en este caso?
6. Tenemos a un capacitor de placas paralelas cuadradas de área A y separación d, en el vacío. ¿Cuál es el efecto cualitativo de cada uno de los casos siguientes sobre su