UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA

FACULTAD DE INGENIERIA

Equilibrio Estable e Inestable: Aproximación de Pequeñas Oscilaciones

Curso Mecánica Newtoniana

Dr. Ing. Ricardo E. Marotti

(khamul@fing.edu.uy)

Instituto de Física

INSTITUTO DE FÍSICA

Objetivos

- Estudio de Equilibrio.
- Establecer Condición de Equilibrio.
- Clasificación en Equilibrio Estable o Inestable.
- Método: Aproximación de Pequeñas Oscilaciones.

(en torno a posiciones de equilibrio estable)

~ Linealizar Ecuación Diferencial (Ecuación de Movimiento).

~ Preintegral de Movimiento (Ej: ecuación de conservación de energía) a 2º orden.

Planteo del Problema

- Sistema Conservativo: $T + U = E$
  - T: Energía Cinética.
  - U: Energía Potencial.
  - E: Energía Total (constante).
- q: coordenada generalizada (1 grado de libertad para el movimiento).

$$T = \frac{A(q)}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \qquad U = U(q)$$

- $T \geq 0$ con $T = 0 \Leftrightarrow dq/dt = 0 \Rightarrow A(q) > 0$

Definición de Equilibrio

- $q = q_0$ es posición de equilibrio:

Se dan condiciones iniciales:

$q(0) = q_0$: posición inicial.

$dq/dt\ (0) = 0$: velocidad inicial nula (reposo).

$\Rightarrow q(\mathrm{t}) = q_0$ para todo instante t posterior.

Definición Equilibrio Estable

- Equilibrio Estable: Si condiciones iniciales se apartan *levemente* de las anteriores: $q(t) - q_0$ permanece acotado.

~ pequeñas variaciones en torno al equilibrio.

$\Rightarrow x(\mathrm{t}) \equiv q(\mathrm{t}) - q_0 \Rightarrow x$, dx/dt pequeños.

- En otro caso el Equilibrio es Inestable.

Observaciones generales:

- x coordenada medida a partir del equilibrio.
- $q = q_0 \Rightarrow x = 0$.
- $x(\mathrm{t}) \equiv q(\mathrm{t}) - q_0 \Rightarrow dx/dt = dq/dt$

Pequeñas Oscilaciones

- *x*, *dx/dt*, *d²x/dt²* pequeños.
- Se aproximan energías a <u>segundo orden</u> en esas cantidades:

$$T = \frac{A(q)}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \approx \frac{A(q_0)}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$U = U(q) \approx U(q_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x^2$$

Pequeñas Oscilaciones

- Sistema Conservativo: $T + U = E$

$$\frac{A(q_0)}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(q_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x^2 \approx E$$

$$T = \frac{A(q)}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \approx \frac{A(q_0)}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$U = U(q) \approx U(q_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x^2$$

Pequeñas Oscilaciones

- Sistema Conservativo: $T + U = E$

$$\frac{A(q_0)}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(q_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x^2 \approx E$$

- Ecuación de Movimiento:

$$A(q_0)\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o}\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \approx 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 : \text{Solución introducida en } T + U = E$$

Pequeñas Oscilaciones

$$A(q_0)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o}x \approx 0$$

$$A(q_0)\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o}\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o}x\cancel{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \approx 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=0:\text{Solución introducida en } T+U=E$$

Definición de Equilibrio

- $q = q_0$: es posición de equilibrio:

Se dan condiciones iniciales:

$q(0) = q_0$: posición inicial.

$dq/dt\ (0) = 0$: velocidad inicial nula (reposo).

$\Rightarrow q(\mathrm{t}) = q_0$ para todo instante t posterior.

Pequeñas Oscilaciones

$$A(q_0)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o}x\approx 0$$

$q(0) = q_0$: posición inicial. ~ $x = 0$

dq/dt (0) = 0: velocidad inicial nula (reposo).

$\Rightarrow q(t) = q_0$ para todo instante t posterior.

~ $d^2x/dt^2 = 0$

Pequeñas Oscilaciones

$$A(q_0)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x \approx 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o} = 0$$

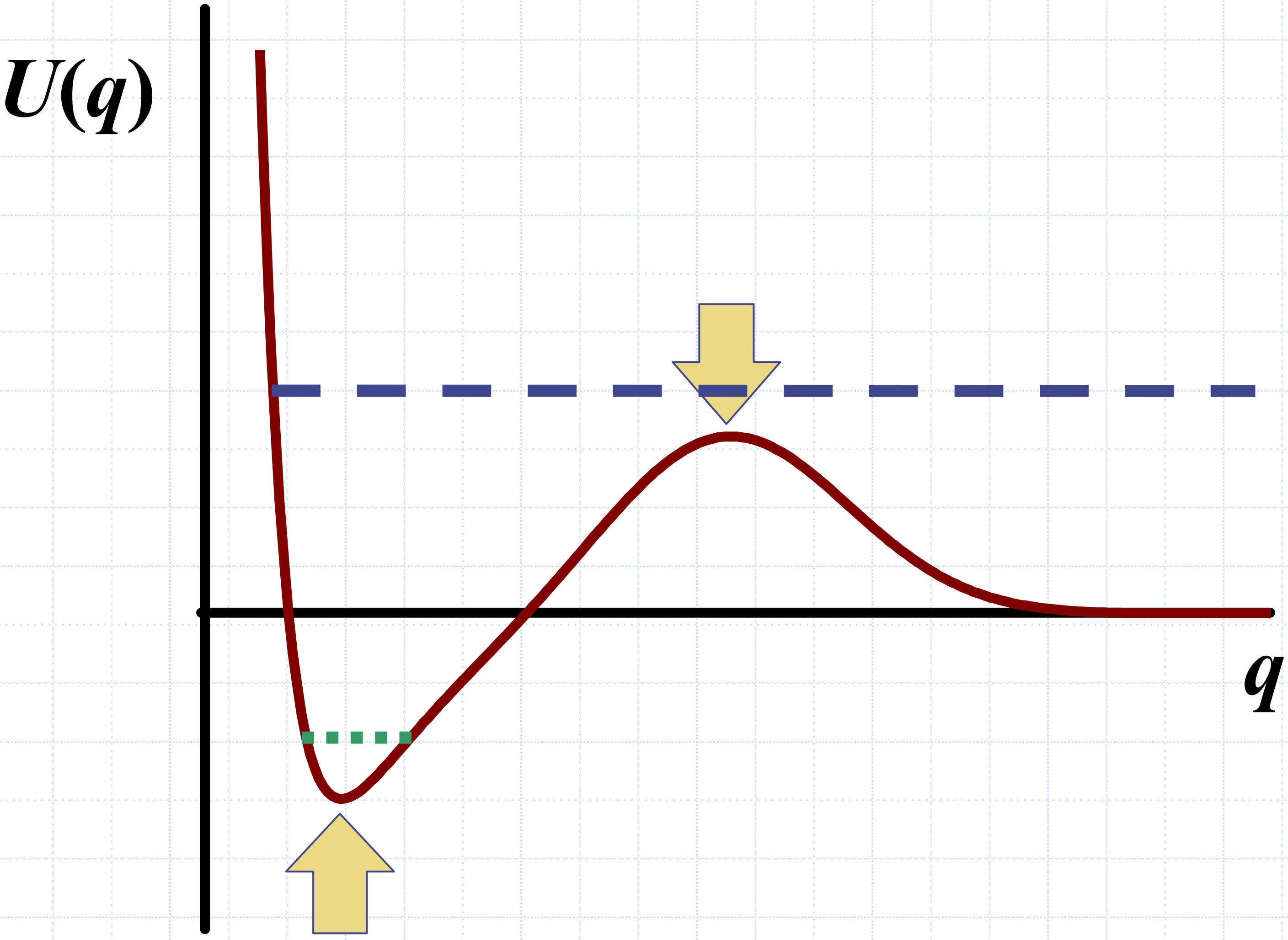
~ $x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\partial U/\partial q = 0$ en posición de equilibrio $q = q_0$.

~ Energía Potencial tiene un extremo relativo en las posiciones de equilibrio.

~ $d^2x/dt^2 = 0$

Extremos Relativos de la Energía Potencial



Pequeñas Oscilaciones

$$A(q_0)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x \approx 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_{q_o} = 0$$

¿Cuándo hay oscilaciones?

$$A(q_0)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x \approx 0$$

- $T \geq 0$ con $T = 0 \Leftrightarrow dq/dt = 0 \Rightarrow A(q) > 0$

Pequeñas Oscilaciones

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} > 0$$

$\Rightarrow$ Si energía potencial es mínima en el equilibrio, el equilibrio es estable.

Frecuencia de Pequeñas Oscilaciones:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{A(q_0)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o}}$$

¿Cuándo hay oscilaciones?

$$A(q_0)\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} x \approx 0$$

- $T \geq 0$ con $T = 0 \Leftrightarrow dq/dt = 0 \Rightarrow A(q) > 0$

Pequeñas Oscilaciones

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} > 0$$

$\Rightarrow$ Si energía potencial es mínima en el equilibrio, el equilibrio es estable.

Frecuencia de Pequeñas Oscilaciones:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{A(q_0)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o}}$$

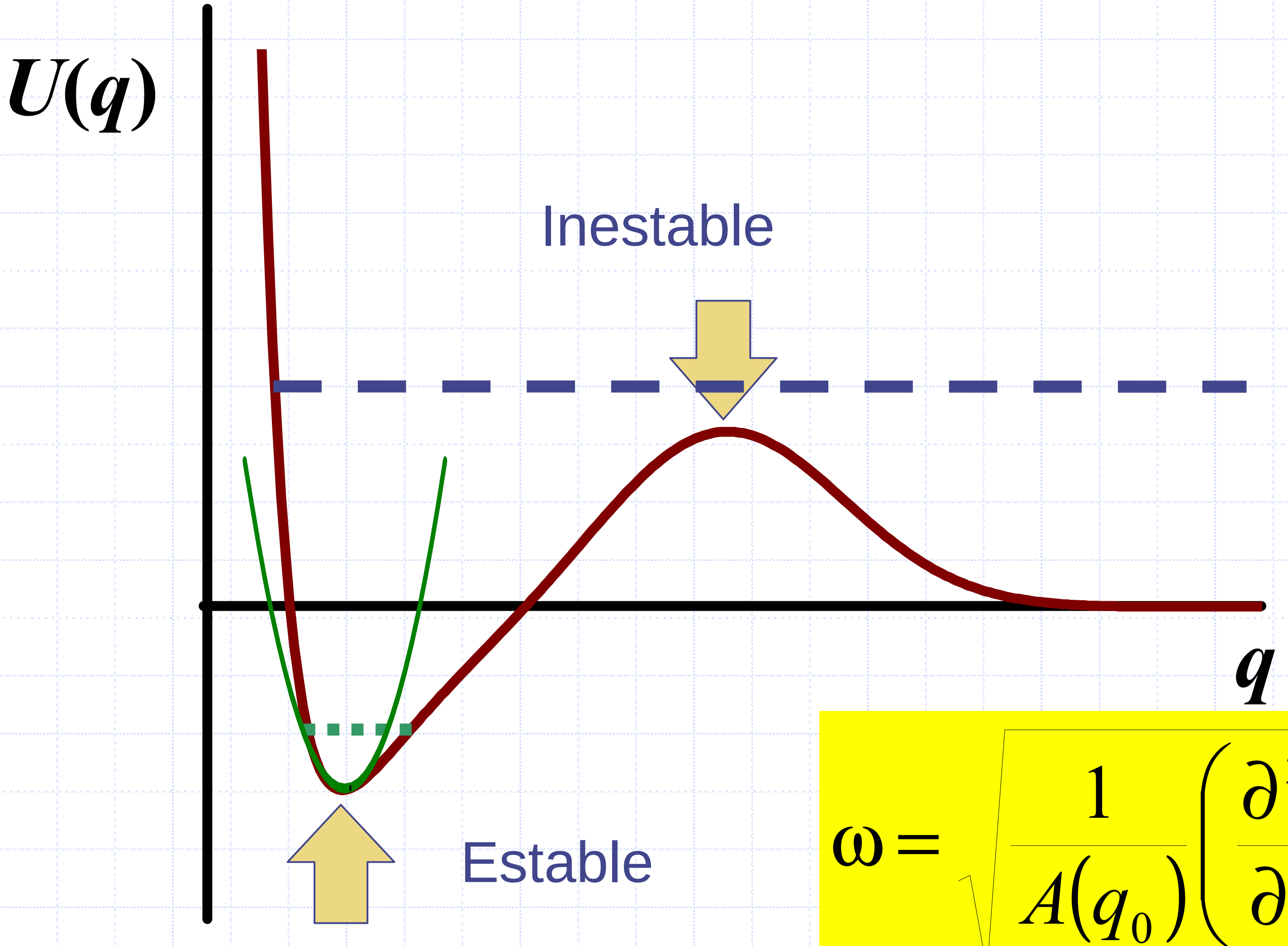
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} < 0$$

$\Rightarrow$ Si es máxima, el equilibrio es inestable.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o} = 0$$

$\Rightarrow$ Oscilador no lineal o equilibrio inestable.

Extremos Relativos de la Energía Potencial



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{A(q_0)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_{q_o}}$$