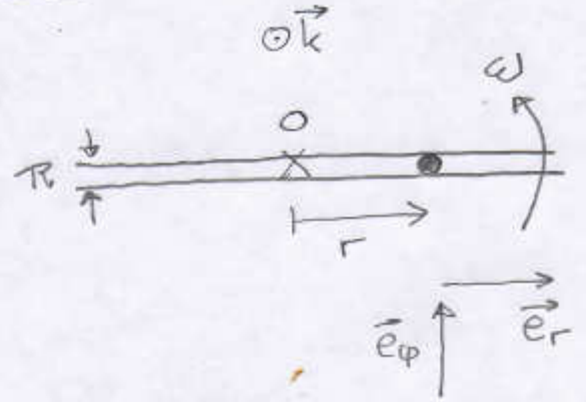
Ejercicio Nº 12



parte a:

Condiciones Iniciales:

$r(0) = 0$

$\dot{r}(0) = v_0$

$r \to$ coordenada radial (distancia de la partícula al centro de giro O)

Para hallar la ley horaria primero hay que hallar la ecuación de movimiento y luego resolverla.

Siempre que se tenga una guía Lisa (por letra sin rozamiento) la ecuación de movimiento se halla proyectando la ecuación de Newton (2ª Ley) según la dirección tangencial. Le llamaremos $\vec{e}_r$.

$m\vec{a} = \vec{F}^{(neta)} \Rightarrow m\vec{a}\cdot\vec{e}_r = \vec{F}^{(neta)}\cdot\vec{e}_r$

$\vec{F}^{(neta)} = -mg\vec{k} + \vec{N}$

Como el tubo se mantiene contenido en un plano horizontal el peso es perpendicular a ese plano (formado por $\vec{e}_r$ y $\vec{e}_\varphi$)

$\vec{N} = N_1\vec{k} + N_2\vec{e}_\varphi \leftarrow$ No hay componente según $\vec{e}_r$ porque la guía es lisa (sin rozamiento)

$\Rightarrow \vec{F}^{(neta)}\cdot\vec{e}_r = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{e}_r = 0$

Ahora esta ecuación vale en un sistema inercial; y el sistema $O\vec{e}_r\vec{e}_\varphi\vec{k}$ no lo es (porque rota respecto a un " absoluto "fijo" $\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$

↑ Teorema de Coriolis

$\vec{r} = r\vec{e}_r$

En el sistema relativo $O\vec{e}_r\vec{e}_\varphi\vec{k}$ son "fijos" $\Rightarrow \vec{a}' = \ddot{r}\vec{e}_r$

$\vec{a}_T = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\vec{a}_O} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dot{\vec{\omega}}} \wedge (P-O) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-O)]$ $\quad P-O = r\vec{e}_r = \vec{r}'$

porque O fijo en sistema absoluto

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ con ω constante y $\vec{k}$ fijo en sistema absoluto

$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$

$\vec{\omega}$ es la misma vista respecto al sistema relativo o el absoluto ($\vec{k}$ también es fijo en el sistema relativo)

Recordar: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}}_{0} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$ Como ambas derivadas coinciden le llamamos $\dot{\vec{\omega}}$ sin ambigüedad

$\vec{a}_T = \omega\vec{k}\wedge[\omega\vec{k}\wedge r\vec{e}_r] = \omega\vec{k}\wedge(r\omega\vec{e}_\varphi) = -r\omega^2\vec{e}_r$

Aceleración Centrípeta (Equivale a una fuerza centrífuga $\vec{F}_T = -m\vec{a}_T = mr\omega^2\vec{e}_r$)

$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}' = 2\omega\vec{k}\wedge\dot{r}\vec{e}_r = 2\omega\dot{r}\vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{a}_C\cdot\vec{e}_r = 0$ La aceleración de Coriolis nunca da lugar a una componente tangencial porque $\vec{a}_C \perp \vec{v}'$ y $\vec{v}' = \dot{r}\vec{e}_r$ dirigido según la tangente

$\Rightarrow \ddot{r} - r\omega^2 = 0$ ← Ecuación de Movimiento
Hay que resolverla para hallar ley horaria

Verificación: hallo $\vec{a}$ por derivación directa en el sistema absoluto

$\vec{r} = r\vec{e}_r$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$

En el sistema absoluto $\vec{e}_r$ es móvil
Puedo hallar esta derivada por la ecuación de coordenadas cilíndricas

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \omega\vec{e}_\varphi$$

o por $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{e}_r = \omega\vec{k}\wedge\vec{e}_r = \omega\vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\omega\,\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{=\,\omega\vec{e}_\varphi} + \dot{r}\omega\vec{e}_\varphi + r\omega\underbrace{\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}}_{=\,-\omega\vec{e}_r}$$

(procediendo análogamente como en $\vec{e}_r$)

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{e}_r + 2\dot{r}\omega\,\vec{e}_\varphi$$

relativa centrípeta Coriolis

Es la misma expresión de la aceleración en coordenadas cilíndricas con $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = 0$ y $\ddot{z} = 0$ (tubo permanece en mismo plano horizontal)

Resolución de la ecuación de movimiento: ecuación diferencial de 2º orden (" " " " siempre es de 2º orden) lineal a coeficientes constantes homogénea

$\Rightarrow$ busco solución: $\left.\begin{aligned} r &= \mathbb{C}e^{\lambda t} \\ \dot{r} &= \mathbb{C}\lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{r} &= \mathbb{C}\lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}\right\} \cancel{\mathbb{C}}\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} - \omega^2 \cancel{\mathbb{C}e^{\lambda t}} = 0$

$e^{\lambda t} \neq 0$ y $\mathbb{C} \neq 0$ (porque sino $r(t) \equiv 0 \ \forall t$ y corresponde a equilibrio en O)

$\Rightarrow \lambda = \pm\omega \Rightarrow r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Se hallan imponiendo condiciones iniciales (Tengo 2 constantes a hallar preciso 2 condiciones iniciales)

$r(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$

$\Rightarrow r(t) = A(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = 2A\,\mathrm{sh}(\omega t)$

$\dot{r}(0) = v_0 \quad \dot{r}(t) = 2A\omega\,\mathrm{ch}(\omega t) \Rightarrow 2A\omega = v_0 \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega}$

$\Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sh}(\omega t)}$ Ley horaria parte b: $m\vec{a} = \vec{F} = -mg\vec{k} + \vec{N}$

$\vec{N} = m\vec{a} + mg\vec{k}$

$2m\dot{r}\omega\vec{e}_\varphi = 2m\underbrace{2A\omega}_{v_0}\, ch(\omega t)\,\omega\vec{e}_\varphi$

$$\boxed{\vec{N} = mg\vec{k} + 2mv_0\omega\, ch(\omega t)\,\vec{e}_\varphi}$$

$N_1 = mg$

$N_2 = 2mv_0\omega\, ch(\omega t)$

¿Tienen los dos sumandos las mismas dimensiones?

Siempre verifique las dimensiones o unidades de los resultados a los que llegue.

En la ecuación de movimiento de la parte a también.

parte c: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_T$

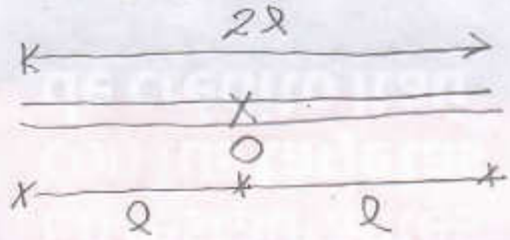
$\vec{v}\,' = \dot{r}\vec{e}_r$

$\vec{v}_T = \vec{v}_O + \vec{\omega}\wedge(P-O) = \omega\vec{k}\wedge r\vec{e}_r = r\omega\,\vec{e}_\varphi$

$\vec{v}_O = 0$ (O fijo)

$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\varphi$ ← En la parte a ya se había llegado a este resultado por derivación directa

Tubo largo $2l$:

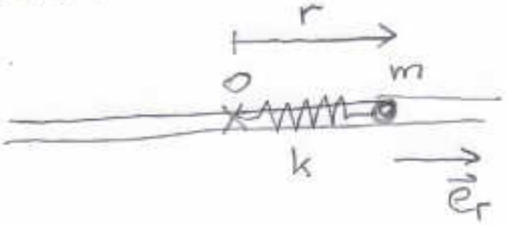


$\Rightarrow r(t) = l = \frac{v_0}{\omega} sh(\omega t) \Rightarrow sh(\omega t) = \frac{l\omega}{v_0}$ ← Observe que este resultado es adimensionado

$\dot{r}(t) = v_0\, ch(\omega t) = v_0\sqrt{1+sh^2(\omega t)} = v_0\sqrt{1+\left(\frac{l\omega}{v_0}\right)^2} = \sqrt{v_0^2+l^2\omega^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \sqrt{v_0^2+l^2\omega^2}\,\vec{e}_r + l\omega\,\vec{e}_\varphi}$$

parte d:



Cambia la fuerza neta

Se agrega la " del resorte

$\vec{F}_{res} = -k(r - r_0)\vec{e}_r$

$\overset{\shortparallel}{0}$ (longitud natural nula)

$\vec{F}_{res} = -kr\vec{e}_r = -k\vec{r}$

La guía sigue siendo lisa:

$m\vec{a}\cdot\vec{e}_r = \vec{F}^{(neta)}\cdot\vec{e}_r = -kr$

$m(\ddot{r} - r\omega^2) = -kr \Rightarrow \ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)r = 0$

¡Estudiar dimensiones!

Nueva ecuación de movimiento

Sigue siendo lineal de 2º orden a coeficientes constantes homogénea; pruebo con $r(t) = \mathbb{C}e^{\lambda' t}$

Y procediendo como antes $\lambda' = \pm\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$

Si $\omega^2 > \frac{k}{m}$ vale el mismo procedimiento de antes

cambiando $\lambda \times \lambda' \Rightarrow r(t) = \frac{v_0}{\lambda'}\,sh(\lambda' t)$

$(\lambda' \in \mathbb{R})$

y siempre existirá un instante

$$t = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}}\,\mathrm{arcsh}\left(\frac{\ell\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}}{v_0}\right)$$

en que la bola alcance el extremo del tubo

Observar que la fuerza ficticia $m\omega^2 r\vec{e}_r$ y la fuerza del resorte tienen la misma forma solo que una es centrífuga y la otra es centrípeta. Si $\omega^2 > \frac{k}{m}$ gana la fuerza " y la bola se acelera hacia el exterior siempre.

$\Rightarrow$ Para que la bola no alcance el extremo debe ser $\boxed{\omega^2 < \frac{k}{m}} \sim k > m\omega^2$

¿Qué sucede si $k = m\omega^2$?

$\Rightarrow$ Si $k > m\omega^2$ $\quad \lambda' = j\alpha$ con $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$

$$r(t) = A' \operatorname{sen} \alpha t + B' \cos \alpha t$$

$$r(0) = 0 \sim B' = 0 \Rightarrow r(t) = A' \operatorname{sen} \alpha t$$

$$\dot{r}(0) = v_0 \Rightarrow A' \alpha \cos \alpha t \Big|_{t=0} = v_0 \Rightarrow A' = \frac{v_0}{\alpha}$$

$$r(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}} \, \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\, t\right) \leftarrow$$ La bola oscila con amplitud A' porque gana la fuerza centrípeta del resorte

Y finalmente $A' < l$ para que la bola no alcance el extremo $r = l$:

$$\Rightarrow \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}} < l \Rightarrow \boxed{v_0 < l\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}}$$

Con $\boxed{k > m\omega^2}$

¡Estudiar dimensiones!