Ejercicio 13. Práctico 3.

a)

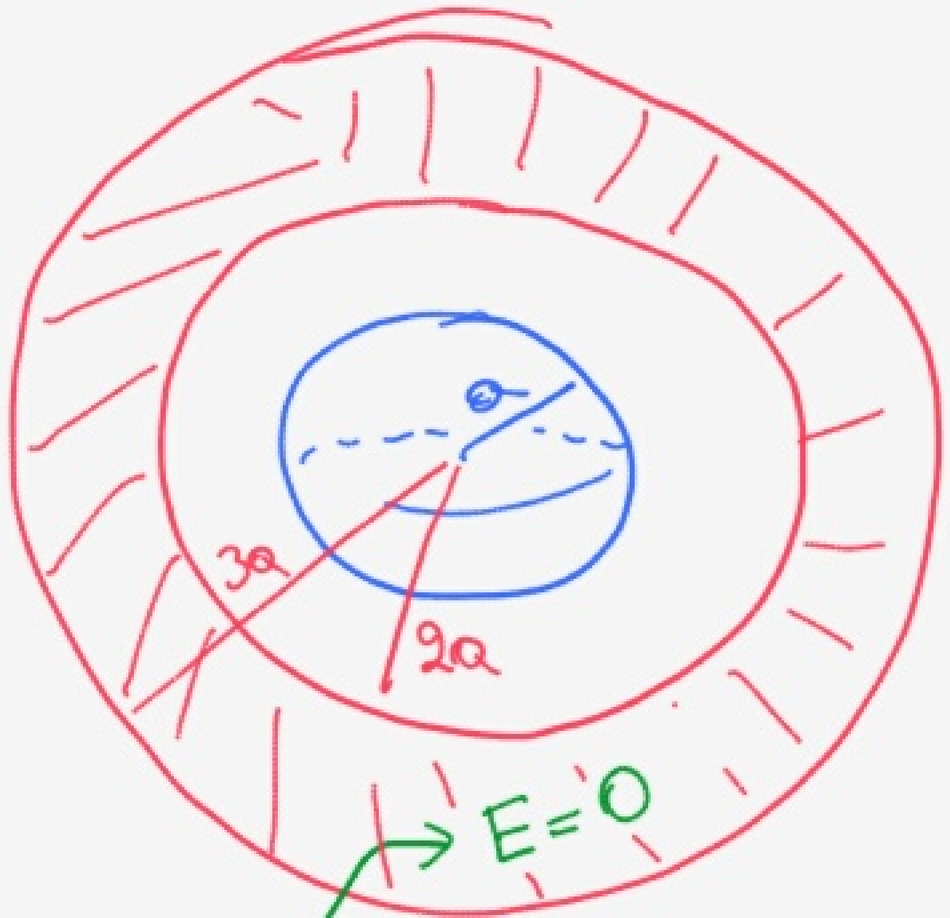
El sistema está formado por

1) esfera maciza aislante con carga Q distribuida uniformemente

↳ dónde? en todo el volumen de la esfera

por lo cual, la densidad volumétrica de carga es constante

$$\rho = \frac{Q}{Vol} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

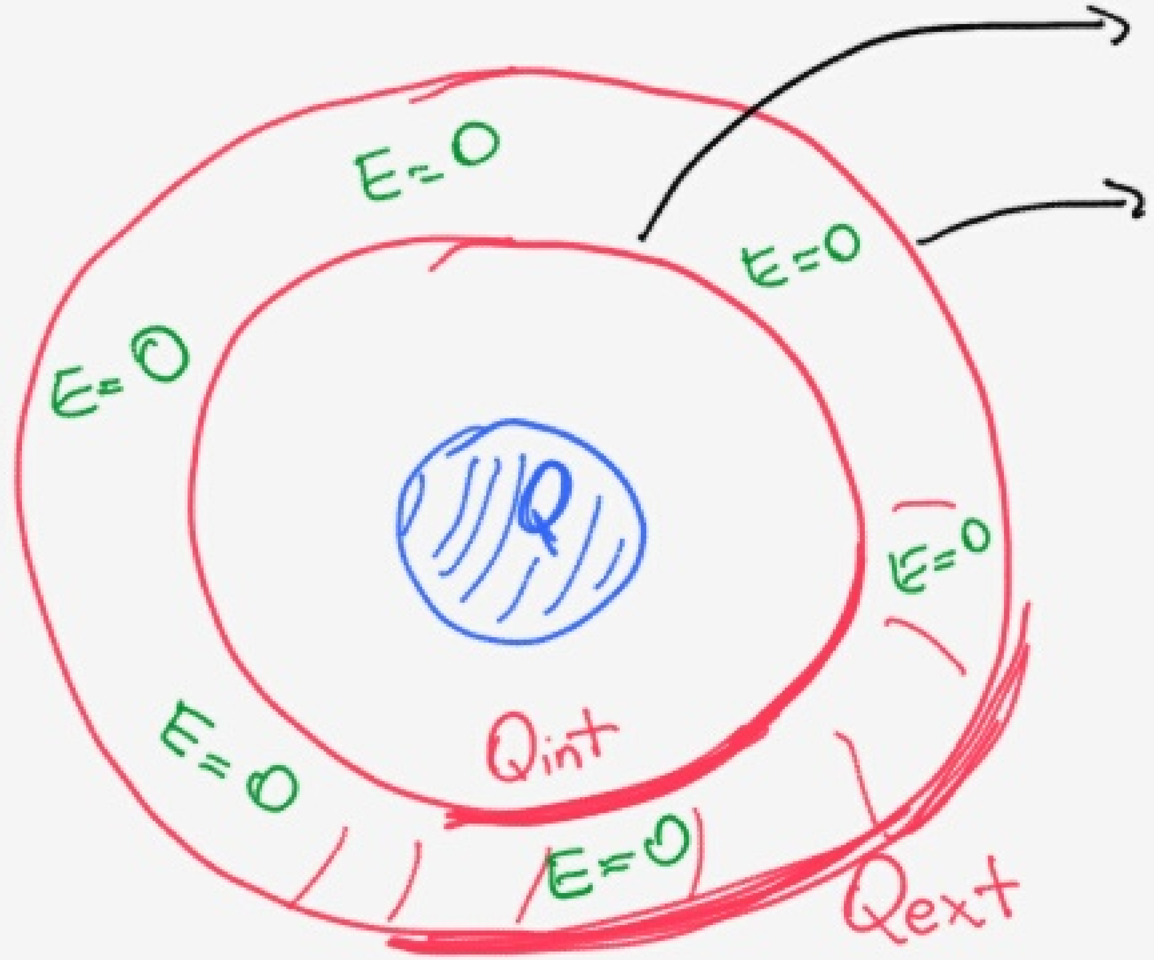


2) cascarón (esfera hueca de radio interno 2a y radio externo 3a) CONDUCTOR con carga Q

Por ser conductor

- El campo dentro del conductor es nulo
- La carga se encuentra en las superficies del conductor

tengo 2 superficies posibles: la superficie interna y la externa



superficie interna de área $A_{int} = 4\pi(2a)^2$

superficie externa de área $A_{ext} = 4\pi(3a)^2$

Como la carga en el conductor se encuentra en sus superficies voy a tener una carga Q_{int} distribuida en la superficie interior y una carga Q_{ext} distribuida en la superficie exterior.

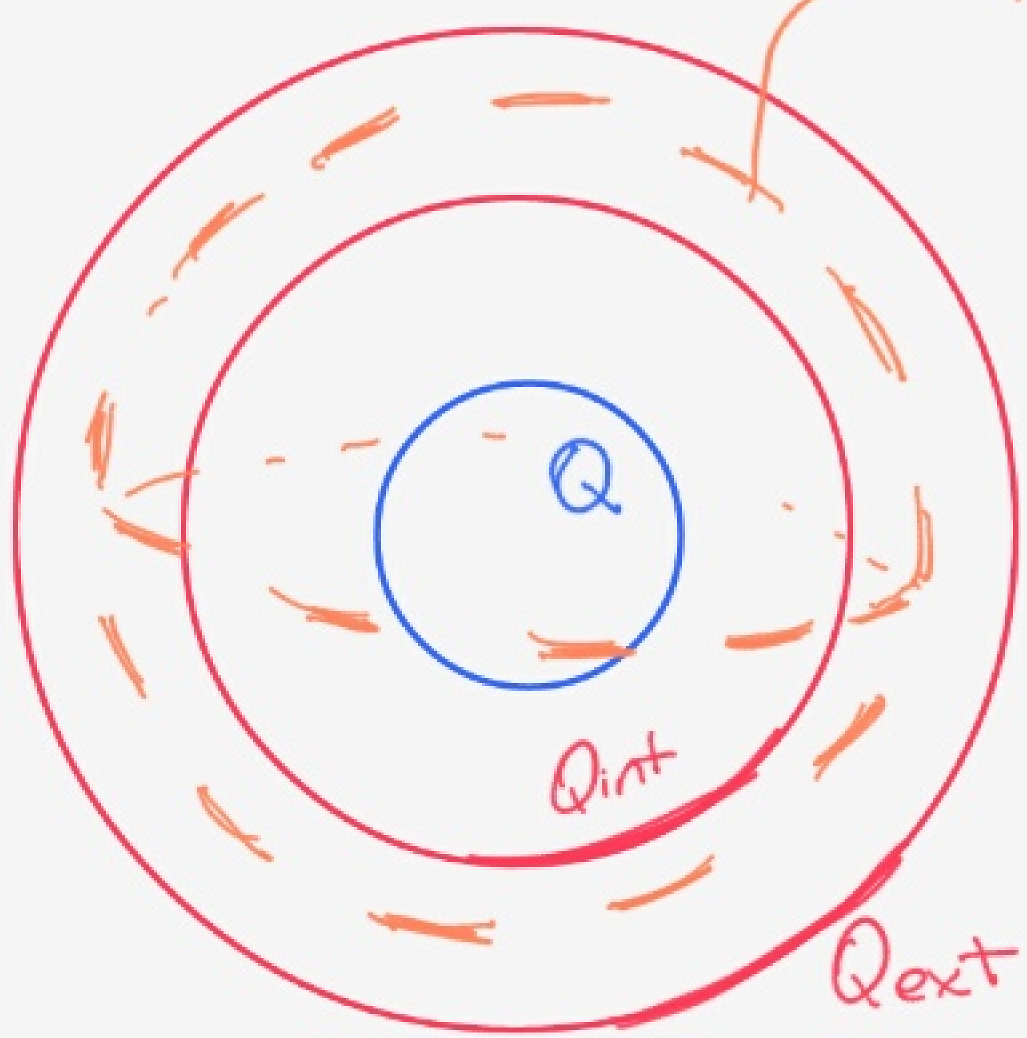
Entonces queremos calcular $Q_{int} = ?$

$Q_{ext} = ?$

Si sabemos que en total el conductor tiene carga $Q \Rightarrow \boxed{Q_{int} + Q_{ext} = Q}$

Para calcular Q_{int} usemos el hecho que por ser <u>conductor</u> el campo en el interior del mismo vale cero.

Voy a elegir una superficie Gaussiana contenida <u>dentro</u> del cascarón conductor



superficie Gaussiana:

→ tiene que ser cerrada, esto significa que encierre un volumen.

Pero es una superficie, un área, como si fuera la goma de un globo sólamente y miro la goma y no el aire dentro.

→ En general me conviene elegir una superficie Gaussiana con la misma simetría que el sistema: en este caso esférica.

La elijo dentro del conductor y aplico la Ley de Gauss

Ley de Gauss:

$$\underbrace{\oint_{(S)} \vec{E}\cdot\hat{n}\, da}_{=\,0} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{Q + Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

porque $E=0$ dentro del conductor ← 0

carga que queda encerrada por la superficie Gaussiana

$$\Rightarrow Q + Q_{int} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{int} = -Q}$$

Mostramos que la $\boxed{Q_{int} = -Q}$
además sabemos que en total el conductor tiene carga $Q = Q_{int} + Q_{ext}$

$$\Longrightarrow \boxed{Q_{ext} = 2Q}$$

Esa carga está distribuida en toda la superficie, y se distribuye uniformemente por simetría. Es decir no hay razón para que haya más carga acumulada en alguna parte más que en otra.

Entonces la distribución superficial de carga es:

$$\sigma_{int} = \frac{Q_{int}}{A_{int}} = \frac{-Q}{4\pi(2a)^2} = \frac{-Q}{16\pi a^2}$$

$$\sigma_{ext} = \frac{Q_{ext}}{A_{ext}} = \frac{2Q}{4\pi(3a)^2} = \frac{Q}{18\pi a^2}$$

Parte b) Hallar el campo eléctrico en todo el espacio $\vec{E}(\vec{r})$ y graficar su módulo en función de r.

→ El campo eléctrico es una propiedad de los puntos del espacio. Si lo quiero calcular tengo que identificar o elegir primero el punto y decir en este punto voy a calcular el campo eléctrico.

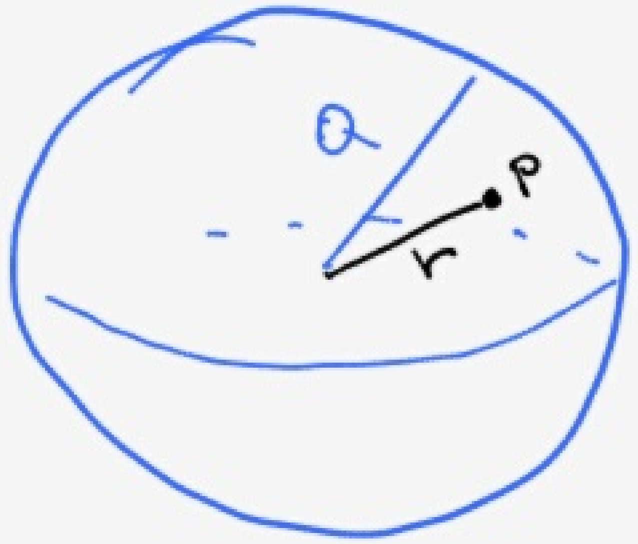
El sistema se puede dividir en 4 zonas: zona 1) dentro de la esfera aislante. Puntos con $r < a$

zona 2) puntos con r / $a < r < 2a$.

zona 3) dentro del conductor, puntos con r / $2a < r < 3a$

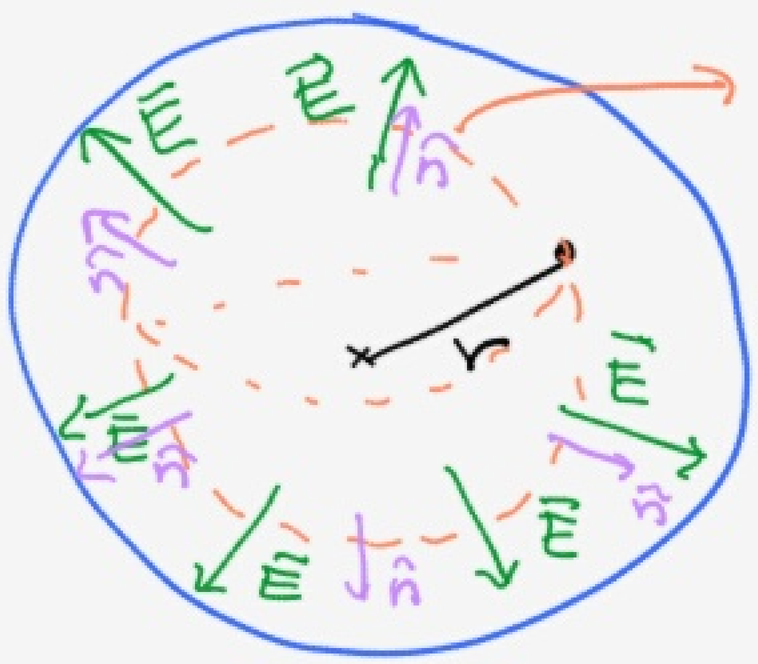
zona 4) fuera del sistema, puntos con r / $r > 3a$

zona 1 . puntos con $r < a$



i) elijo un punto arbitrario dentro de la esfera aislante, punto en el cual voy a querer calcular el campo
Por ej. el punto P a una distancia r ($r<a$) del centro.

ii) Elijo una superficie Gaussiana que pase por
SIEMPRE debe ser CERRADA
dicho punto y que tenga la misma simetría del sistema: esférica.



superficie Gaussiana.

iii) Voy a querer calcular el flujo a través de esa superficie. Me conviene dibujar cómo es el campo $\vec{E}$ y la normal saliente en dicha superficie.

observaciones: $\vec{E}$ es saliente y radial
por tener Q positiva
. $\vec{E}$ sólo depende de la distancia al centro

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{e}_r}$$

La normal $\hat{n}$ también es radial y saliente

$$\left.\begin{aligned} \hat{n} &= \hat{e}_r \\ \vec{E}(\vec{r}) &= E(r)\,\hat{e}_r \end{aligned}\right\}$$

Flujo a través de la superficie Gaussiana

$$\oint \underbrace{\vec{E}\cdot\hat{n}}_{\text{producto escalar}}\, da = \oint E(r)\underbrace{\cos\theta}_{\substack{\text{ángulo}\\ \text{entre } \vec{E} \text{ y } \hat{n}}}\, da$$

$$= \oint E(r) \underbrace{\cos\theta}_{1}\, da = \underbrace{\oint E(r)\, da}_{\text{es la integral en la superficie anaranjada}} = E(r)\oint da = E(r)\ \underset{\text{Gaussiana}}{\text{Área de la superficie}}$$

En esa superficie: ¿cómo es el campo $\vec{E}$? ¿varía en los diferentes puntos de esa superficie?
La superficie está toda a una distancia fija del centro, como todos los puntos están a la misma distancia el campo $E(r)$ es constante en dicha superficie.

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, da = E(r)\ \underset{\text{Gaussiana}}{\text{Área de la superficie}} = E(r)\, 4\pi r^2}$$

iv) Planteo la Ley de Gauss en la superficie Gaussiana

Ley de Gauss: $$\underbrace{\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, da}_{\text{|| recién calculado}} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} \text{ por la sup. Gaussiana}$$

$E(r)\,4\pi r^2$

¿quién es la $q_{encerrada}$ por ?

$q_{encerrada} = \rho$ Vol. encerrado

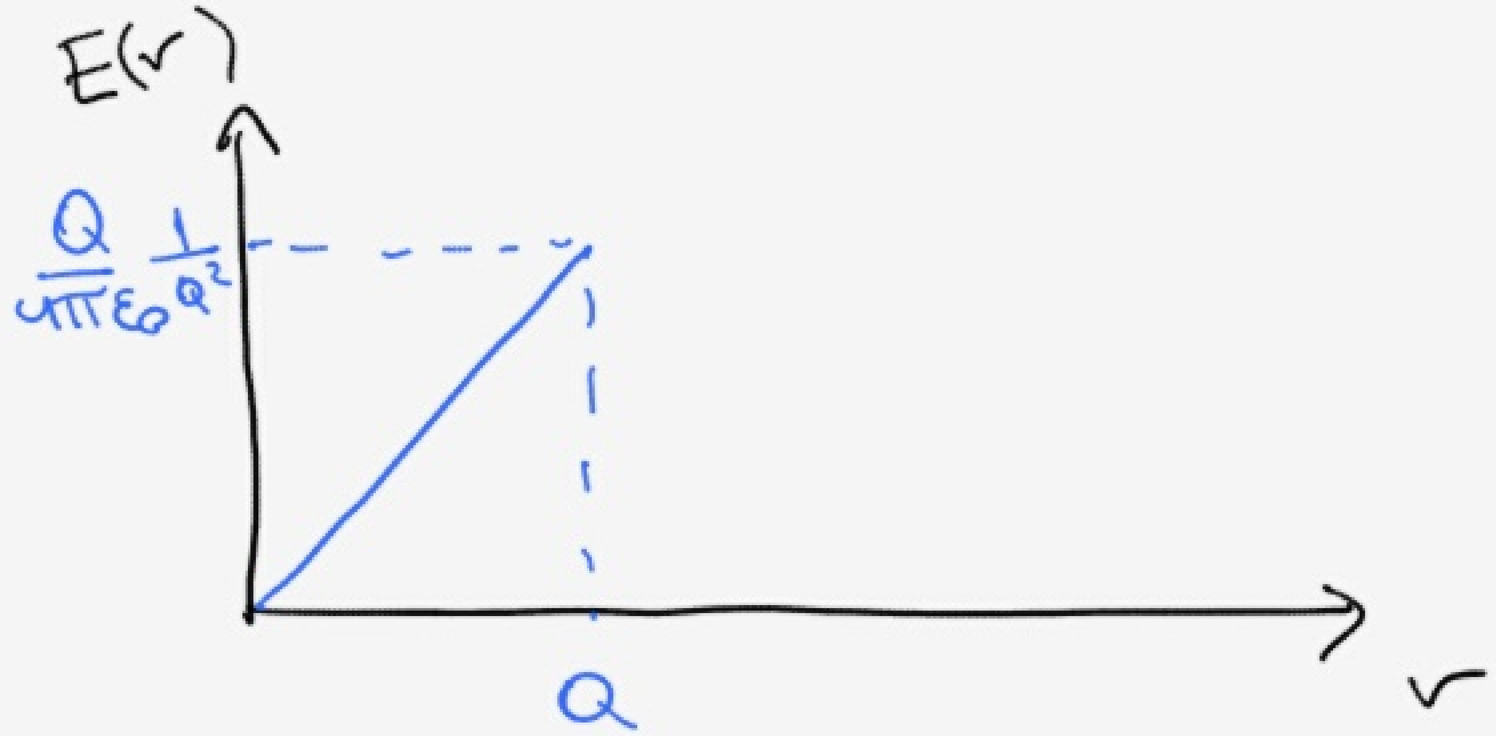
$= \rho \, \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Longrightarrow$ Ley de Gauss

$$E(r)\,\cancel{4\pi}\,\cancel{r^2} = \frac{\rho\,\cancel{\frac{4}{3}\pi}\,r^{\cancel{3}}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\vec{r}}$$

para $r<a$ dentro de una esfera aislante



$r<a$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

crece lineal con r

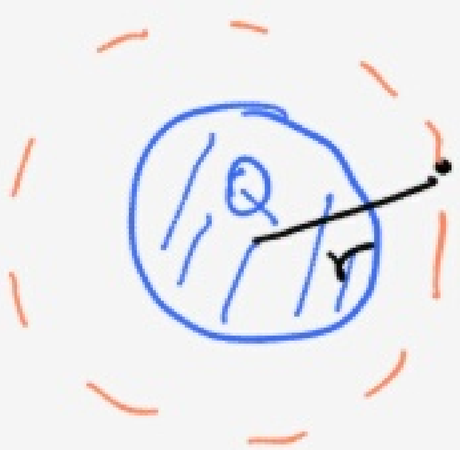
también lo puedo escribir usando $\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}} \quad r<a$$

cuando $r=a$

$$E(r=a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}$$; como el de una carga puntual

zona 2. $a<r<2a$



i) elijo un punto en la zona $a<r<2a$

ii) elijo una superficie Gaussiana que pase por él

iii) sigo los mismos pasos que en el iii) de la zona 1

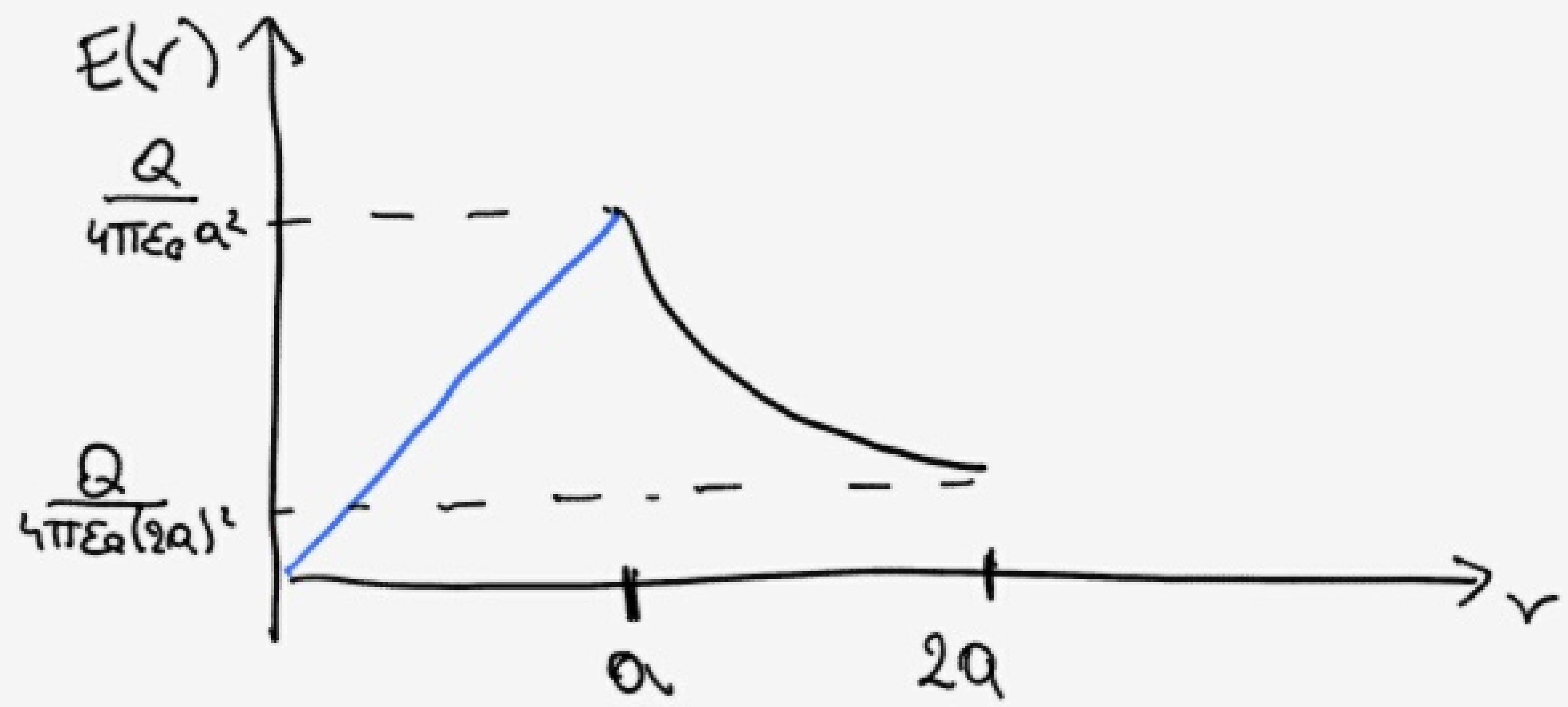
$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = E(r)\,4\pi r^2$$

iv) Aplico la Ley de Gauss: $\underbrace{\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, da}_{= E(r)\, 4\pi r^2} = \underbrace{\frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}}_{= \frac{Q}{\varepsilon_0}}$ (la carga que quedó delimitada por la sup gaussiana es la Q de la esfera aislante)

$$\Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2}$$

también radial saliente: $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \, \hat{e}_r}$ $a < r < 2a$

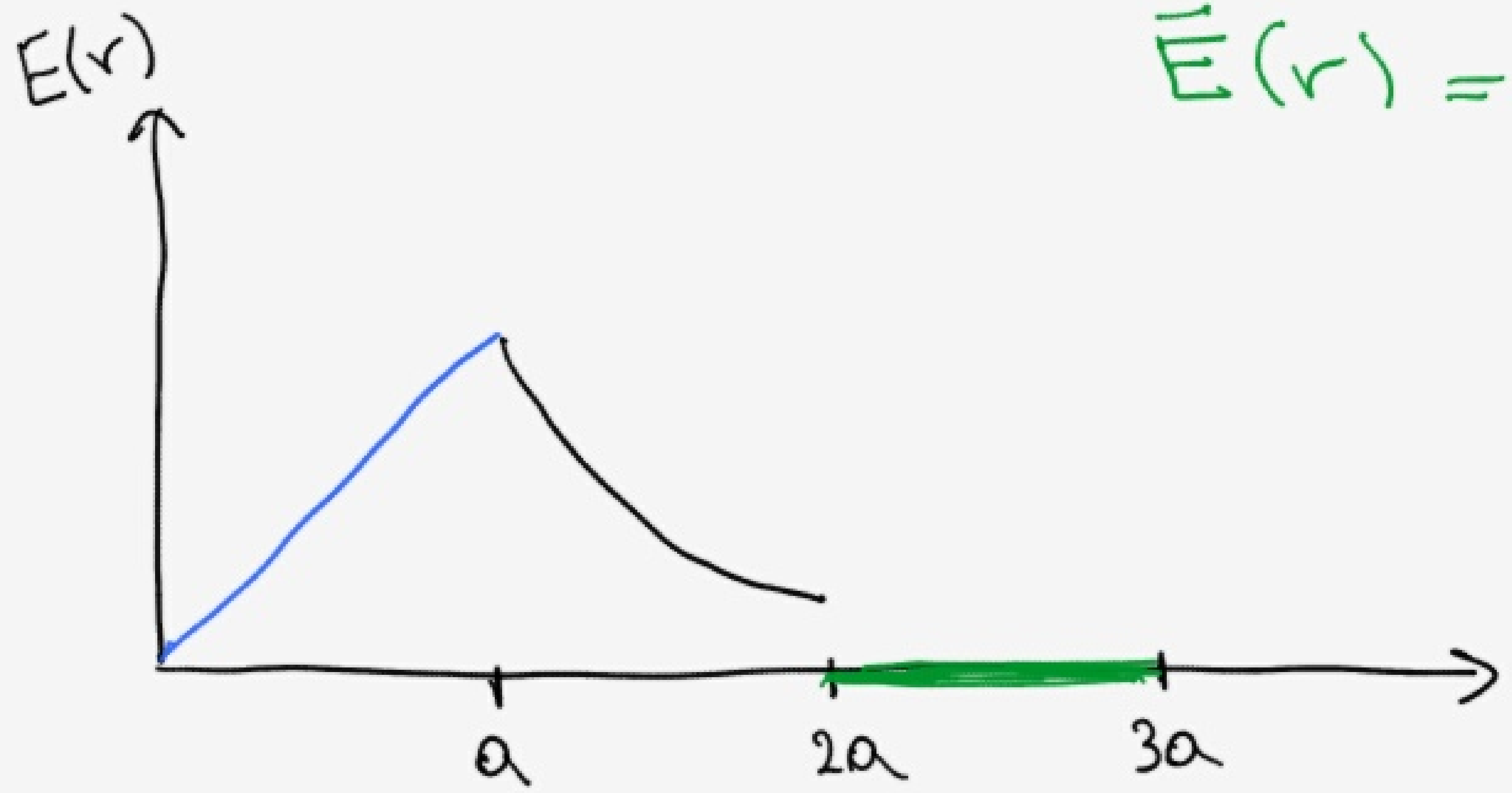
El campo afuera de una esfera cargada es como el campo producido por una carga puntual y decae como el cuadrado de la distancia al centro.



zona 3 : $\underline{2a < r < 3a}$ dentro del conductor.

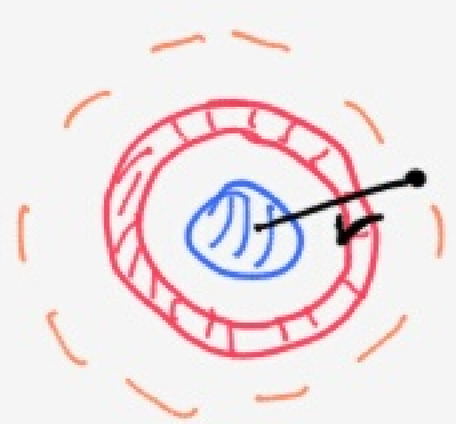
Por estar dentro de un conductor el campo eléctrico es nulo

$$\vec{E}(r) = 0 \quad \text{para} \quad 2a < r < 3a$$



↳ observar que el campo eléctrico no es continuo. Puede haber discontinuidades en las zonas donde hay carga acumulada

zona 4 : $r > 3a$



i) elijo un punto arbitrario en la zona de interés

ii) tomo una superficie Gaussiana que pase por él.

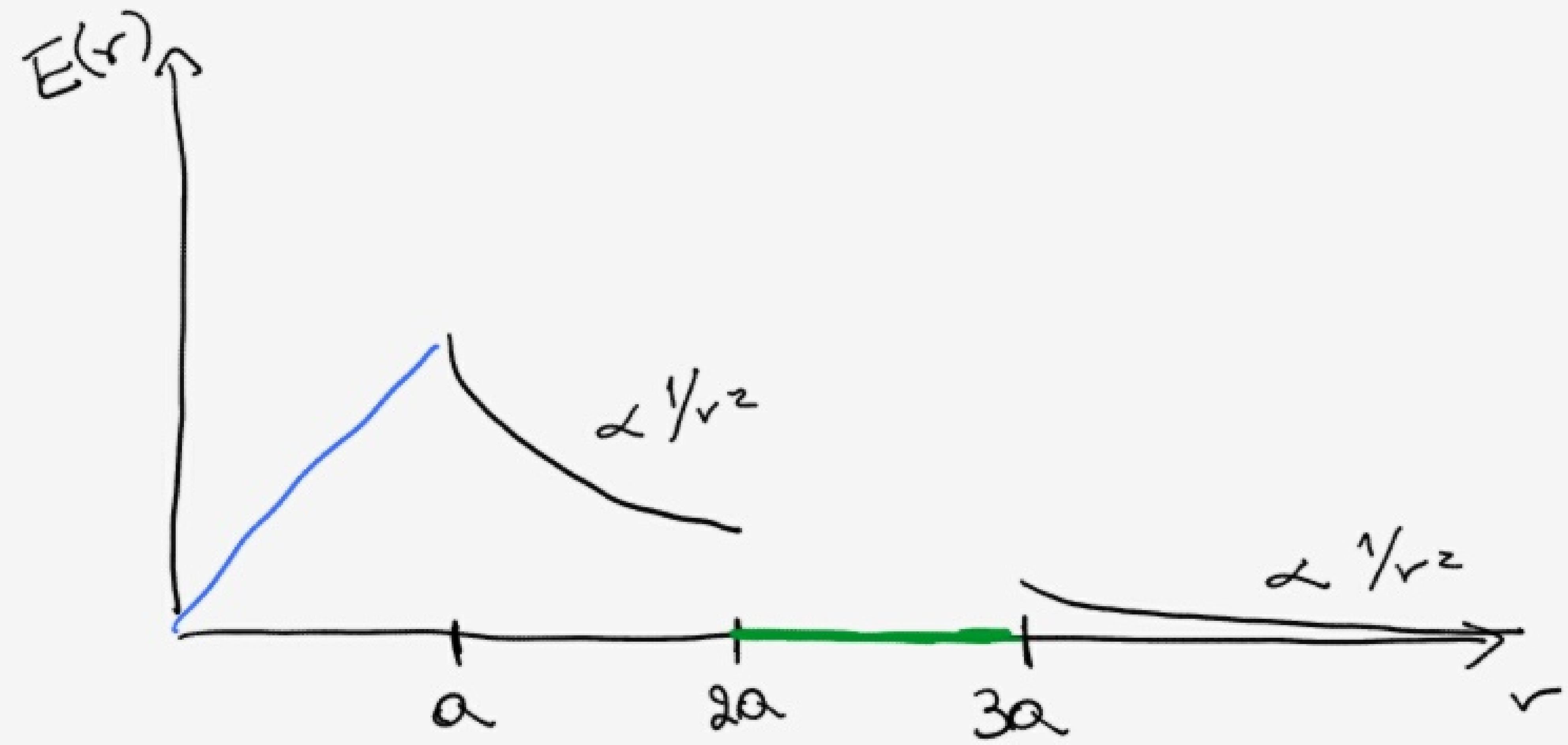
iii) mismo procedimiento que iii) de la zona 1. Llego a ver que

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, da = E(r) 4\pi r^2$$

iv) Aplico la Ley de Gauss en dicha superficie Gaussiana

$$\underbrace{\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, da}_{=\,E(r)\,4\pi r^2} = \underbrace{\frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}}_{=\,\frac{Q+Q}{\varepsilon_0}} = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{e}_r}$$



$$E(r=3a) = \frac{Q}{18\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$E(r=2a) = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$ (mirar zona 2)

Parte c) Hallar el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ en todo el espacio tomando como referencia que $V(0)=0$

- Lo que podemos calcular son diferencias de potenciales:

$$\Delta V_{ab} = V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

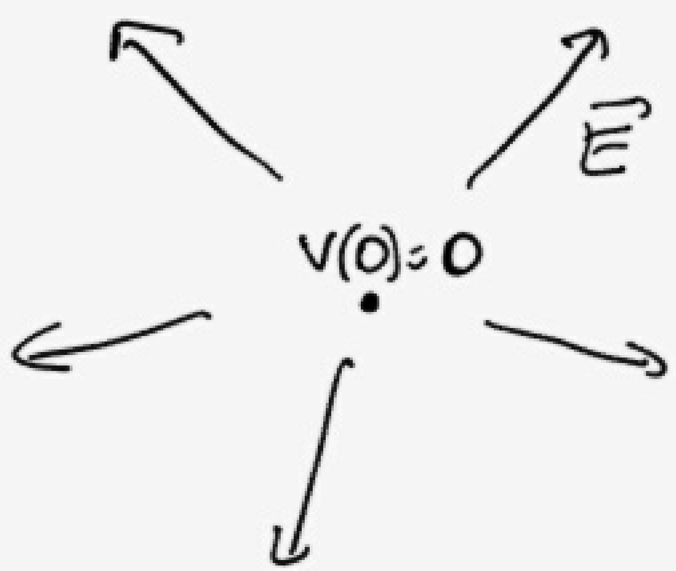
↳ producto escalar.

integrando en una curva que va desde 'a' a 'b'.

- El potencial disminuye en la dirección del campo

observación:

En nuestro sistema el campo siempre es radial saliente.



Si $V(0)=0 \Rightarrow$ en el resto del espacio el potencial tiene que ser negativo.

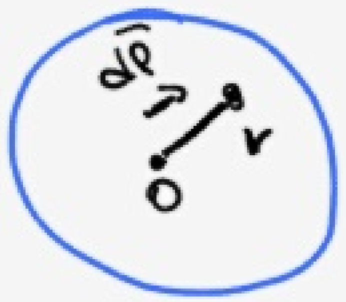
Estudiemos las diferentes zonas.

<u>zona 1)</u> <u>$r<a$</u>

$$V(r)-V(0) = -\int_0^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^r E\cos\theta\, dl$$

↳ ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{l}$

elijo una curva que une el punto 0 con el punto r, conviene que sea si se puede colineal con $\vec{E}$

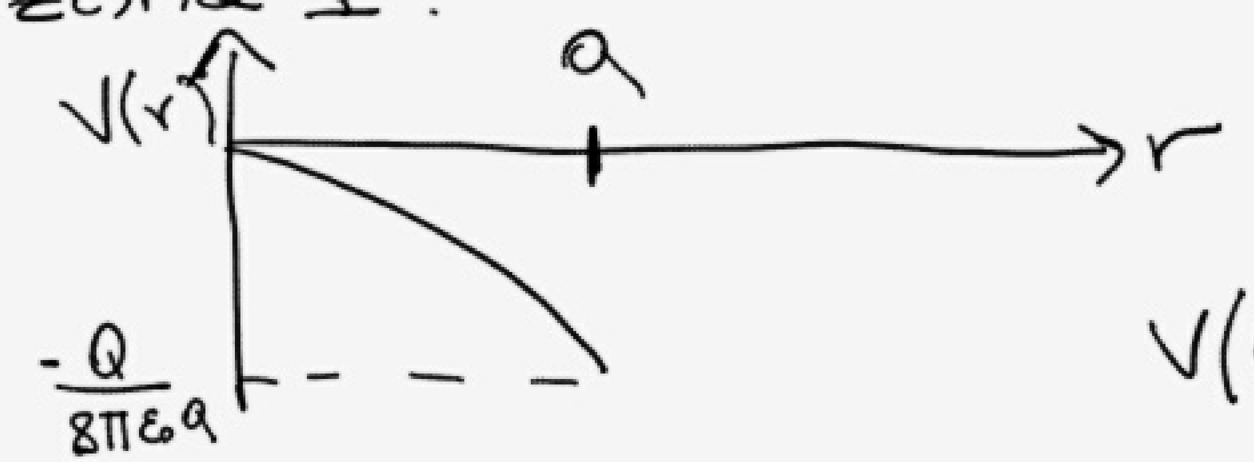


en este caso el $dl = dr$. y $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$$V(r) - \underbrace{V(0)}_{=0} = -\int_0^r E(r)\, dr = -\int_0^r \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} = \frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$

↓ uso el valor de $E(r)$ correspondiente a la zona 1.

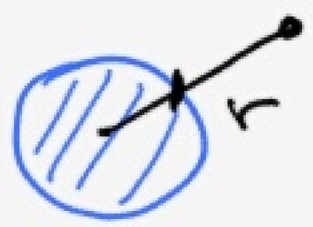
$$\Longrightarrow \boxed{V(r) = \frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} = \frac{-Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{a^3}} \quad \underline{r<a}$$



$$V(a) = \frac{-Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

• Observemos que el potencial eléctrico sí es continuo porque siempre calculo ΔV.

<u>Zona 2</u> <u>$a < r < 2a$</u>



$$V(r) - V(a) = -\int_a^r E(r)\,dr = -\int_a^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

de la zona 2

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^r$$

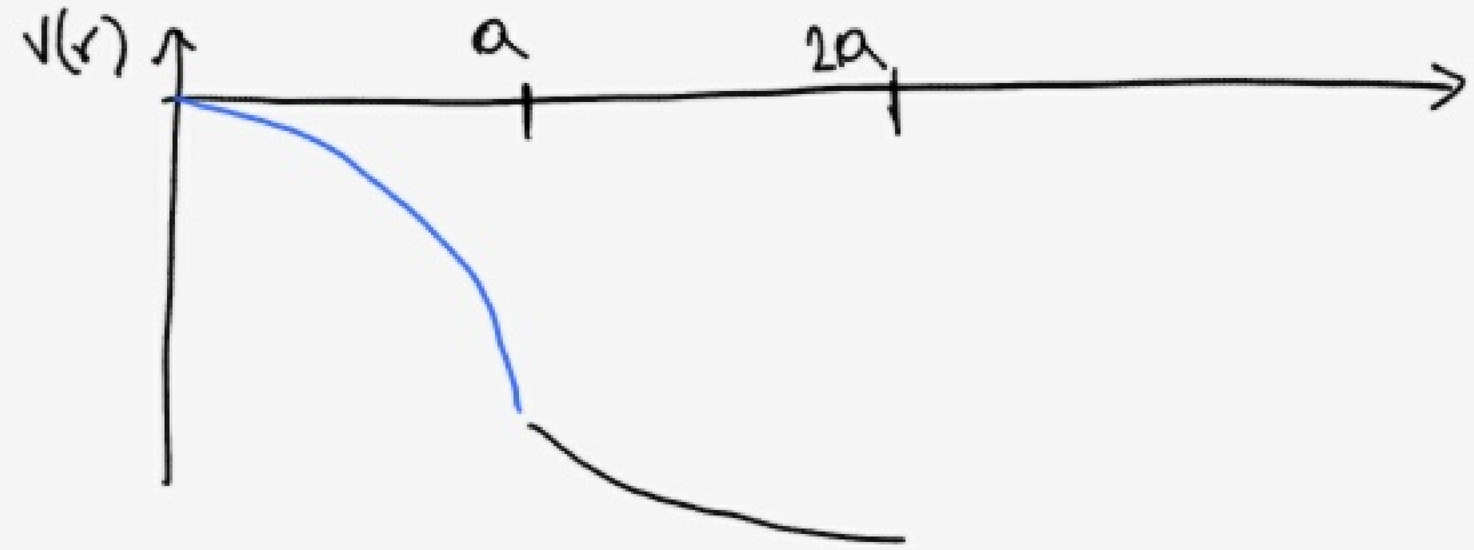
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}_{\overset{\wedge}{0}}$$

el potencial sigue decreciendo

$$\Longrightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + V(a)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + \frac{-Q}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2a}\right)$$

$$V(r = 2a) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

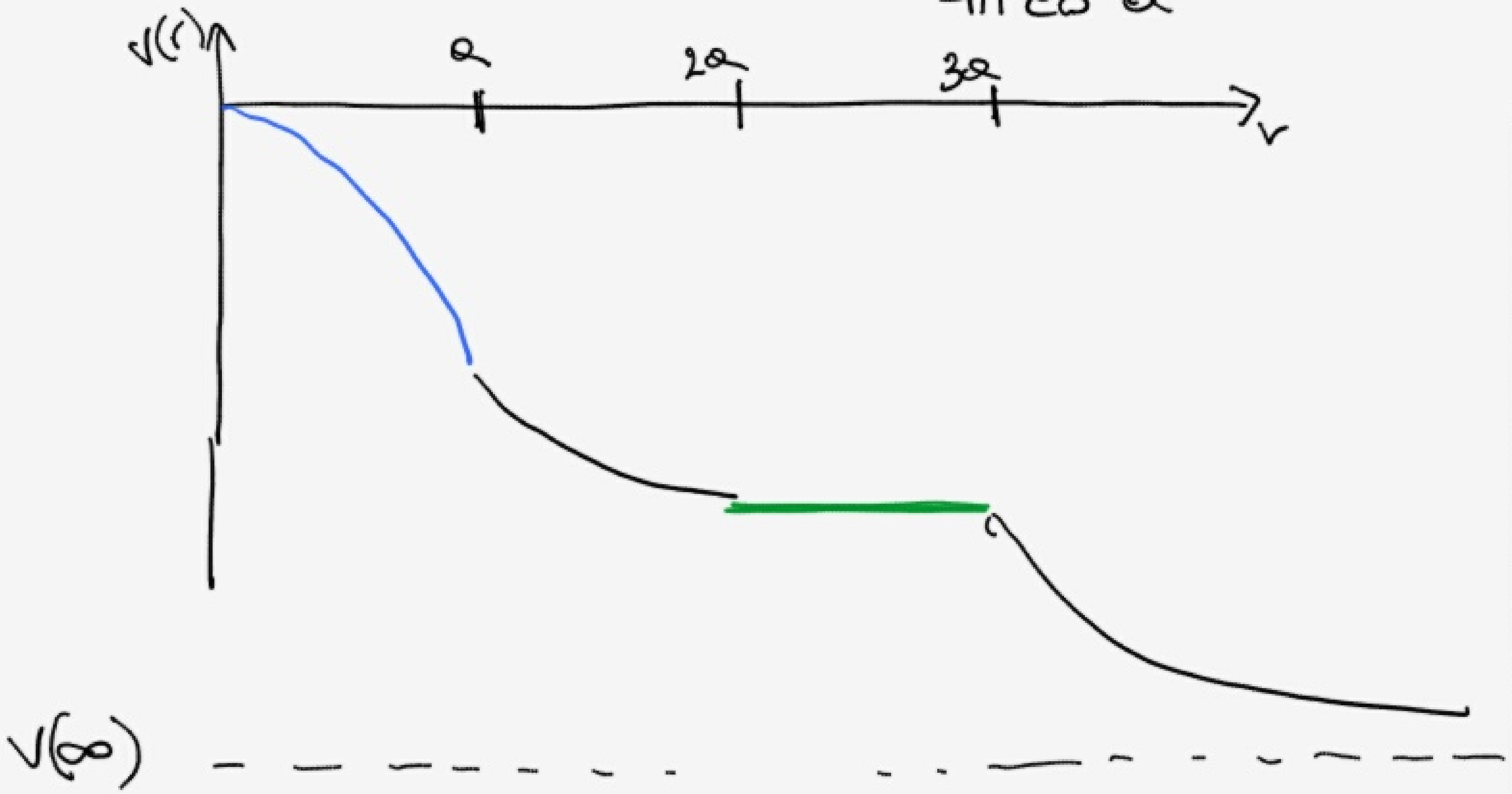


zona 3: $2a < r < 3a$: Dentro del conductor

$$V(r) - V(2a) = -\int_{2a}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

dentro del conductor el campo eléctrico es cero

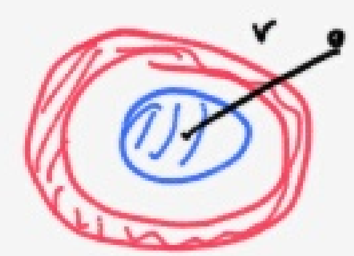
$$\Rightarrow V(r) = V(2a) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad \forall r \in [2a, 3a] \Rightarrow V(3a) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$



zona 4: $r > 3a$

$$V(r) - V(3a) = -\int_{3a}^{r} E(r)\, dr$$

campo de la zona 4



$$= -\int_{3a}^{r} \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

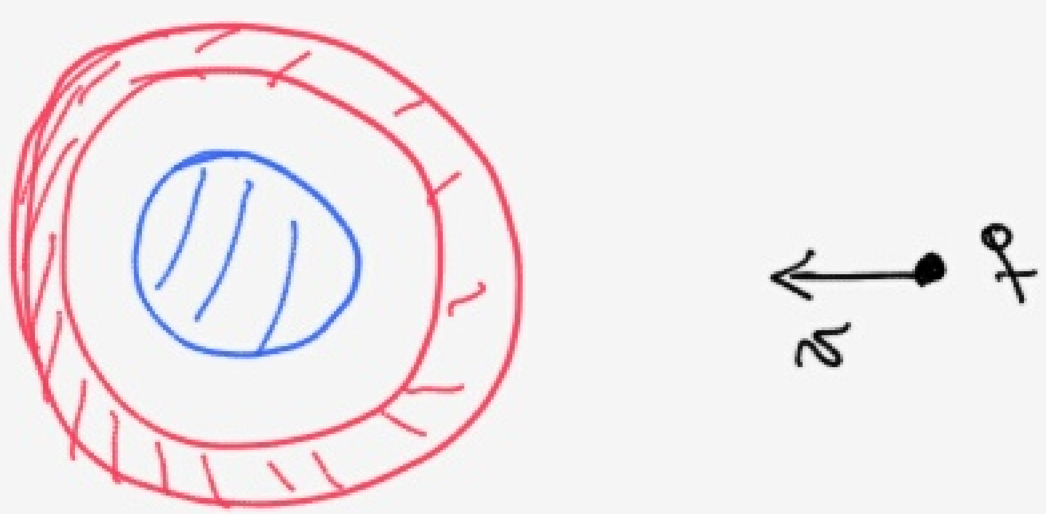
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_{3a}^{r} = \overbrace{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3a}\right)}^{<0}$$

$$V(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3a}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

el potencial eléctrico en el infinito lo puedo calcular haciendo $r \to \infty$ en el potencial de la zona 4.

$$V(\infty) = -\frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{5}{12}\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a}$$

Parte d. Una partícula de masa m y carga $q>0$ es lanzada hacia el centro desde $d = 6a$. Calcule la $v_{máx}$ que se le puede dar sin que penetre en el cascarón.



antes de empezar, podríamos observar que la fuerza sobre esta partícula es saliente así que es natural que se vaya frenando.

Vamos a analizarlo por energía:

$$\underset{\text{variación de energía cinética}}{=}\ \Delta K = \underbrace{W_{neto}}_{\text{trabajo neto}} = -q\,\Delta V$$

Pensando en la velocidad máxima con que puedo lanzar la partícula sin que penetre, corresponde a la situación donde justo llega al cascarón con velocidad nula.

$$\Delta K = K_{\substack{\text{al llegar} \\ \text{al cascarón}}} - K_{inicial} = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\parallel$$

$$W_{neto} = W_{F\,eléctrica} = -\underbrace{\Delta U}_{\substack{\text{energía potencial} \\ \text{eléctrica}}}{}_{eléctrica} = -q\,\Delta V = -q\,\underbrace{\left(V(r=3a) - V(r=6a)\right)}$$

$$= -q\,\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{6a}\right)}_{1/6a}$$

$$= \frac{-qQ}{12\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{v_{máx} = \sqrt{\frac{qQ}{m}\,\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 a}}}$$