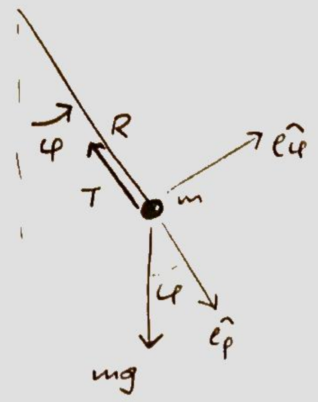
Ejercicio II.8



$\{\varphi\}$: es un problema con un grado de libertad

(mientras el hilo esté tenso la partícula se mueve sobre una cfa de radio R y alcanza con dar un ángulo (φ) para ubicarla)

a) Vamos a sacar la ecuación de movimiento comenzando por la 2da ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$, Proyectándola según los versores $\hat{e}_\rho$ $\hat{e}_\varphi$ de la figura tenemos:

$\hat{e}_\rho$) $mg\cos\varphi - T = -mR\dot{\varphi}^2$ ← ¿por qué no da una ec. de mov.?

$\hat{e}_\varphi$) $\boxed{-mg\,\text{sen}\varphi = mR\ddot{\varphi}}$ Ec. de movimiento

Vamos a reescribir la ec. de movimiento así:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + g/R\,\text{sen}\varphi = 0} \quad (I)$$

NOTA: [para ángulos pequeños ($|\varphi| \ll 1$) $\text{sen}\varphi \approx \varphi$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} + g/R\,\varphi = 0$; si $\omega_0^2 \equiv g/R$:

$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ que es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple de frec. ω_0]

b) Podemos hallar $\dot{\varphi}^2(\varphi)$ preintegrando la ec. anterior;

i) multiplico por $\dot{\varphi}$:

$$\underbrace{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}_{} + g/R\,\underbrace{\text{sen}\varphi\,\dot{\varphi}}_{} = 0$$

ii) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}^2)$ $\quad \frac{d}{dt}(-\cos\varphi)$ ← ver regla de la cadena de derivación

iii) agrupo usando la linealidad de la derivada:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - g/R\cos\varphi\right] = 0$$

← (ver integral definida abajo en lugar de lo que sigue)

iv) puedo inferir que lo que está entre paréntesis es indep. del tiempo:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - g/R\cos\varphi = cte = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(0) - g/R\cos\varphi(0)$$

evaluo la ec. en $t=0$

v) evalúo según las condiciones iniciales del problema:

$\varphi(0) = 0$ (parto del punto más bajo)

$\vec{v}(0) = v_0 \hat{e}_\varphi = R\dot{\varphi}(0)\hat{e}_\varphi$: $\dot{\varphi}(0) = v_0/R$

(sustituyo en lo anterior) $\longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - g/R \cos\varphi = \frac{1}{2}(v_0/R)^2 - g/R :$$

$$\boxed{\dot{\varphi}^2 = 2g/R(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2} \quad (\text{II})$$

c) vínculo bilateral: en lugar de un hilo, una barra sin masa une la partícula al centro de giro y en barra puede generar una fuerza entrante (según $-\hat{e}_\rho$, tal como en el diagrama de la hoja anterior) 'tirando' de la masa como una fuerza saliente ('empuja' según $+\hat{e}_\rho$) corresponde a un sentido definido de la reacción

[el hilo en cambio sólo puede tirar, corresponde a un vínculo unilateral]

$\longleftarrow$ ¿en qué otras situaciones físicas me encuentro una discusión análoga?

i) Busquemos el ángulo donde la partícula se detiene:

$\dot{\varphi}(\varphi_0) = 0$ ($\vec{v} = R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$, $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0$)

$$\overset{(\text{II})}{\Rightarrow} 0 = 2g/R(\cos\varphi_0 - 1) + (v_0/R)^2 : \boxed{\cos\varphi_0 = 1 - v_0^2/2gR} \quad (\text{III})$$

$\exists \varphi_0$ si: $-1 \leq 1 - v_0^2/2gR \leq 1$: $v_0^2 \leq 4gR$

$\Rightarrow$ si $v_0^2 \leq 4gR$: tengo un movimiento oscilatorio entre $-\varphi_0$ y $+\varphi_0$ (las dos soluciones a la ec. (III))

ii) si $v_0^2 > 4gR$: no hay ángulo de detenimiento, movimiento giratorio

iii) $v_0 = 2\sqrt{gR}$: $\cos\varphi_0 = -1$: $\boxed{\varphi_0 = \pi}$

Para hallar el tiempo que demora en llegar a detenerse en $\varphi = \pi$, comencemos por despejar $\dot{\varphi}$ de II:

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2}$$

; analicemos el movimiento con un signo definido para $\dot{\varphi}$:

Veo el movimiento desde $t=0$ hasta t_{φ_0} donde se detiene la partícula,

en el medio $\dot{\varphi} > 0$:

$$\dot{\varphi} = +\sqrt{2g/R\,(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2}\;;$$

Con la definición de $\dot{\varphi}$ tenemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = +\sqrt{2g/R\,(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2}\,,$$

y separo ahora e integro en variables separables:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2g/R\,(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2}} = dt \;; \quad t_{\varphi_0} = \int_0^{t_{\varphi_0}} dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g/R\,(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2}} = \int_0^{t_{\varphi_0}} dt = t_{\varphi_0}$$

$$\boxed{\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g/R\,(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2}} = t_{\varphi_0}} \quad (\text{IV})$$

← pruebe que si cambio el sentido del mov. partiendo de φ_0 hacia 0, el resultado es el mismo

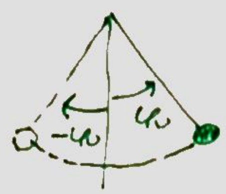
Para $v_0^2 = 4gR$ en particular:

$$t_\pi = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g/R\,(\cos\varphi + 1)}} \longrightarrow \infty$$

i) pruebe que la integral diverge

ii) usando el comentario anterior sobre la inversión ¿no es esperable el resultado sin hacer la integral?

- pregunta extra: ¿Cómo usaría la ec. IV para hallar el período del movimiento oscilatorio que se da cuando $v_0^2 < 4gR$?



[recuerde que transcurre un período cuando se repite la posición y velocidad]

d) En la 2ª ley de Newton proyectada según $\hat{e}_\rho$ tenemos:

$mg\cos\varphi - T = -mR\dot{\varphi}^2$:

$$T = mg\cos\varphi + mR\dot{\varphi}^2 \overset{(III)}{=} mg\cos\varphi + mR\left[\frac{2g}{R}(\cos\varphi - 1) + (v_0/R)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2) + mv_0^2/R} \quad (V)$$

← Obs. que es una fuerza reactiva, determino su forma una vez que conozco el mov., es decir, $\dot{\varphi}^2(\varphi)$

e) La tensión hallada en (V) puede anularse y cambiar de sg; para el caso de una barra no es un problema (puede ejercer la fuerza saliente o entrante), para el caso de un hilo, sólo puede ser ejercida como indica el diagrama del comienzo:

$T(\varphi) \geq 0 \ \forall \varphi$ de forma que la partícula se mueva en una trayectoria circular

$\exists\, \varphi_{des} \,/\, T(\varphi_{des}) = 0$ y el hilo se afloja:

$$T(\varphi_{des}) = mg(3\cos\varphi_{des} - 2) + mv_0^2/R = 0 : \boxed{\cos\varphi_{des} = \frac{1}{3}\left[2 - \frac{v_0^2}{gR}\right]} \quad (VI)$$

$\exists\, \varphi_{des}$ si: $-1 \leq \frac{1}{3}\left[2 - \frac{v_0^2}{gR}\right] \leq 1$:

$$\boxed{v_0^2 \leq 5gR}$$

f) Podemos analizar los tipos de movimiento según v_0 a partir de φ_0 y φ_{des}:

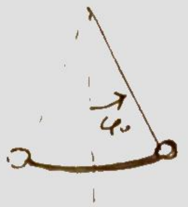
$\cos\varphi_0 = 1 - v_0^2/2gR$, $v_0^2 \leq 4gR$

$\cos\varphi_{des} = \frac{1}{3}\left[2 - \frac{v_0^2}{gR}\right]$, $v_0^2 \leq 5gR$

i) Observe que mientras $v_0^2 \leq 2gR$: $\cos\varphi_0 \geq \cos\varphi_d \geq 0$: $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_d \leq \pi/2$

$\Rightarrow$ se alcanza un ángulo de detenimiento $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$ con el hilo tenso;

el movimiento es oscilatorio:



[en particular, puede ser armónico si $\varphi_0 \ll 1$]

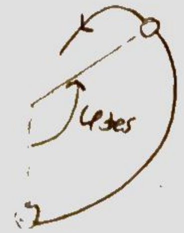
(¿es lo mismo oscilatorio que armónico?)

De $v_0^2 = 2gR$ en adelante se alcanza el ángulo de desprendimiento (si existe) antes que el de detenimiento (si existe); distinguimos entonces 2 intervalos:

ii) $2gR < v_0^2 < 5gR$: $-1 \leq \cos\varphi_{des} \leq 0$: $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{des} \leq \pi$

(y $\varphi_0 > \varphi_{des}$ o bien $\nexists \varphi_0$)

$\Rightarrow$ El hilo se afloja, la partícula describe una circunferencia hasta $\varphi = \varphi_{des}$.



¿Cómo es el movimiento una vez alcanzado φ_{des}?

iii) $v_0^2 \geq 5gR$: $\nexists \varphi_{des}$ (y tampoco φ_0, ya que $v_0^2 > 4gR$)

$\Rightarrow$ La partícula se mueve con el hilo siempre tenso describiendo una circunferencia en un movimiento giratorio

$\leftarrow$ Observe que para una barra este movimiento se alcanza con v_0 menor