

Solución del examen de Electromagnetismo

10 de febrero de 2025

Problema 1

- a. Al ser el medio para $r > R$ óhmico, homogéneo y lineal la densidad de corriente satisface la ley de Ohm:

$$\vec{J} = g\vec{E}.$$

Como el sistema se encuentra en estado estacionario la ecuación de continuidad $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$, queda:

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} = g \nabla \cdot \vec{E}.$$

Además, también debido a que el sistema se encuentra en un estado estacionario, el campo eléctrico deriva de un potencial:

$$\vec{E} = -\nabla\phi.$$

Por lo tanto:

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\phi.$$

Es decir, vale la ecuación de Laplace para $r > R$.

- b. Primero determinemos la condición de borde **lejos de la esfera**. La esfera constituye una región acotada. Por ende el campo eléctrico que generan las cargas en la esfera tiende a cero a gran distancia. Es decir, el campo eléctrico lejos de la esfera es el mismo que había previamente a incluirla. Debido a la ley de Ohm dicho campo es:

$$\vec{E} \sim \frac{\vec{J}_0}{g}.$$

Es decir, el campo lejos de la esfera es uniforme con la dirección de $\vec{J} \parallel \hat{z}$. Por ende el potencial eléctrico lejos de la esfera varía linealmente con la coordenada z :

$$\phi \sim -\frac{J_0}{g}z = -\frac{J_0}{g}r \cos \theta.$$

dónde se utilizó el pasaje de la coordenada cartesiana a las coordenadas esféricas $z = r \cos \theta$.

Ahora determinemos la condición de borde **sobre la superficie de la esfera**. Como la esfera es aislante la carga no puede desplazarse dentro de la misma o, lo que es lo mismo, la densidad de corriente es cero dentro de la esfera. Ahora bien, el sistema está en estado estacionario por lo que si tomamos un pequeño cilindro con parte adentro y parte afuera de la esfera la carga dentro de dicho cilindro no cambiará con el tiempo o, equivalentemente, el flujo de la densidad de corriente en dicho cilindro será nulo:

$$\oint_{\text{cilindro}} \vec{J} \cdot \hat{n} dS = 0.$$

Como se puede tomar el cilbro con el borde muy pequeño el flujo a través de la superficie lateral es despreciable y sólo cuenta en flujo a través de las tapas. Es decir, dado que un vector normal a las tapas es \hat{e}_r :

$$J_r(r = R^-) = J_r(r = R^+).$$

Como ya vimos que la densidad de corriente dentro de la esfera es nula concluimos que la condición de borde sobre la esfera es:

$$J_r(r = R^+) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$E_r(r = R^+) = 0,$$

- c. El problema planteado tiene simetría azimutal pues todas las condiciones de borde son invariantes bajo rotaciones alrededor del eje Oz . Además, como ya vimos, el potencial eléctrico cumple con la ecuación de Laplace. Finalmente, la región $r > R$ es tal que el ángulo θ de las coordenadas esféricas puede variar desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ (con los bordes incluidos). Dadas estas tres propiedades, se probó en el teórico mediante el método de separación de variables que la solución de la ecuación de Laplace tiene la forma señalada en la letra.
- d. Para hallar la forma del potencial eléctrico imponemos a la forma general para este tipo de geometrías las condiciones de borde. Primero imponemos la condición de borde para $r \rightarrow \infty$. Como en ese límite el potencial crece linealmente con r ($\phi \sim -\frac{J_0}{g}z = -\frac{J_0}{g}r \cos \theta$), concluimos que $A_n = 0$ para todo $n \geq 2$ y que

$$A_1 = -\frac{J_0}{g}$$

dónde se utilizó que $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$.

Sin pérdida de generalidad se puede elegir una constante aditiva del potencial libremente por lo que tomaremos $A_0 = 0$.

Habiendo tomado en cuenta la condición de borde para $r \rightarrow \infty$ el potencial queda:

$$\phi(r, \theta) = -\frac{J_0}{g}r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Procedamos ahora a imponer la otra condición de borde. Para ello calculamos la componente radial del campo eléctrico:

$$E_r(r, \theta) = -\frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} = \frac{J_0}{g} \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{B_n}{r^{n+2}} P_n(\cos \theta).$$

Dicha expresión, en $r = R^+$ queda:

$$E_r(r = R^+, \theta) = \frac{J_0}{g} \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{B_n}{R^{n+2}} P_n(\cos \theta).$$

Ahora bien, los polinomios de Legendre son funciones linealmente independientes por lo que, $B_0 = 0$, $B_n = 0$ para todo $n \geq 2$ y

$$B_1 = -\frac{J_0}{2g}R^3.$$

dónde nuevamente se utilizó que $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$.

El potencial eléctrico resultante es:

$$\phi(r, \theta) = -\frac{J_0}{g}r \cos \theta - \frac{J_0}{2g} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta.$$

e. Debido a la ley de Ohm el campo densidad de corriente para $r > R$ es:

$$\vec{J} = -g\nabla\phi.$$

Consecuentemente, como el potencial eléctrico es invariante bajo rotaciones alrededor del eje Oz :

$$J_\varphi = 0.$$

La componente radial de la corriente es:

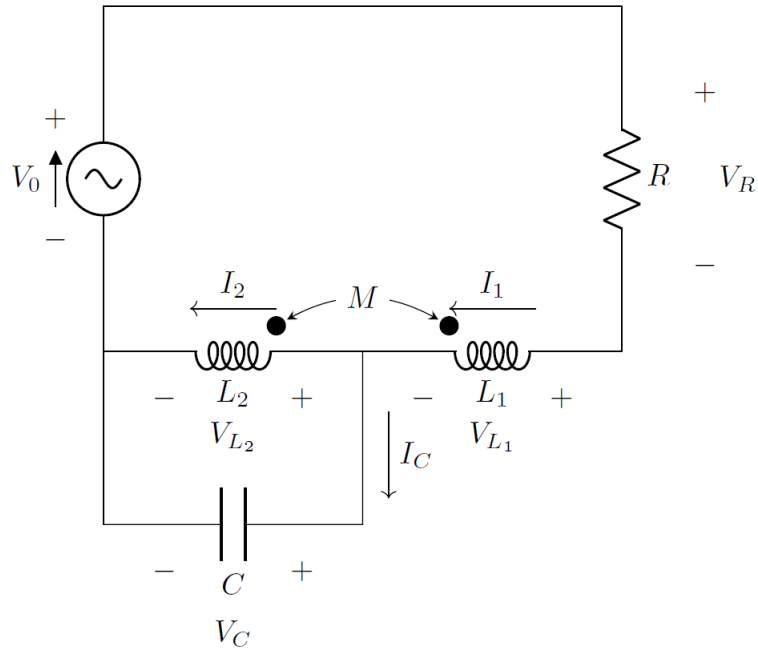
$$J_r = -g \frac{\partial\phi(r, \theta)}{\partial r} = J_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right).$$

Finalmente, se tiene que

$$J_\theta = -g \frac{1}{r} \frac{\partial\phi(r, \theta)}{\partial \theta} = -J_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).$$

Problema 2

Definimos cómo vamos a orientar las corrientes y los voltajes en cada componente:



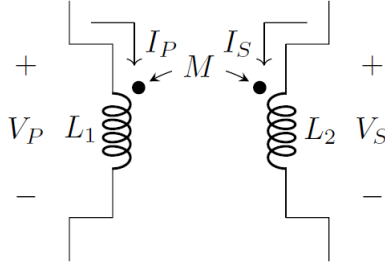
- a. Empecemos planteando mallas y nodos. Tomamos dos mallas, primero la que pasa por la fuente, R , L_1 y L_2 y luego la que pasa por L_2 y C . Esto nos queda:

$$\begin{aligned} V_0 &= V_R + V_{L_1} + V_{L_2} \\ V_{L_2} &= V_C \end{aligned} \quad (1)$$

La ley de nodos queda:

$$I_1 = I_2 + I_C \quad (2)$$

Tenemos que ver cómo queda el voltaje en bornes de las inductancias ya que éstas tienen mutua. Para eso veamos cómo es el caso canónico y luego comparamos con cómo definimos los voltajes y corrientes para este ejercicio particular. El caso canónico es el siguiente:



Donde V_P y V_S se miden con el positivo en el punto y I_P e I_S entrando por el punto. Con esta convención, los voltajes V_P y V_S cumplen:

$$\begin{aligned} V_P &= j\omega L_1 I_P + j\omega M I_S \\ V_S &= j\omega L_2 I_S + j\omega M I_P \end{aligned} \quad (3)$$

Si observamos nuestro circuito podemos ver que para L_1 , el voltaje V_{L_1} no lo medimos con el positivo en el punto sino que lo tomamos al revés. Algo similar sucede con la corriente I_1 , no la tomamos entrando por el punto sino que saliendo por el punto. Para L_2 sí mantenemos la misma convención que el caso canónico. De esta forma vemos que:

$$\begin{aligned} V_P &= -V_{L_1} & V_S &= V_{L_2} \\ I_P &= -I_1 & I_S &= I_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo esto en 3 podemos ver como quedan los voltajes en bornes de las inductancias:

$$\begin{aligned} -V_{L_1} &= j\omega L_1(-I_1) + j\omega M I_2 \\ V_{L_2} &= j\omega L_2 I_2 + j\omega M(-I_1) \end{aligned} \quad (5)$$

Con esto la ecuación de mallas 1 queda:

$$V_0 = R I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 + j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \quad (6)$$

$$j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 = \frac{I_C}{j\omega C} \quad (7)$$

De la ecuación 7 se puede despejar I_C :

$$I_C = -\omega^2 L_2 C I_2 + \omega^2 C M I_1 \quad (8)$$

Con esto y la ecuación de nodos podemos hallar una relación entre I_1 e I_2 :

$$\begin{cases} I_C = -\omega^2 L_2 C I_2 + \omega^2 C M I_1 \\ I_1 = I_2 + I_C \end{cases} \quad \left| \Rightarrow I_2 = I_1 \frac{(1 - \omega^2 C M)}{1 - \omega^2 L_2 C} \right. \quad (9)$$

Ahora de la ecuación 6 sacando de factor común I_1 e I_2 tenemos:

$$V_0 = (R + j\omega(L_1 - M))I_1 + j\omega(L_2 - M)I_2 \quad (10)$$

Ahora juntando 9 y 10 podemos despejar I_1 :

$$I_1 = \frac{V_0(1 - \omega^2 L_2 C)}{R(1 - \omega^2 L_2 C) + j\omega[(L_1 - M)(1 - \omega^2 L_2 C) + (L_2 - M)(1 - \omega^2 C M)]}$$

Sabiendo I_1 , con 9 podemos hallar I_2 :

$$I_2 = \frac{V_0(1 - \omega^2 C M)}{R(1 - \omega^2 L_2 C) + j\omega[(L_1 - M)(1 - \omega^2 L_2 C) + (L_2 - M)(1 - \omega^2 C M)]}$$

Por último con I_1 e I_2 , podemos usar la ecuación 8 para hallar I_C :

$$I_C = \frac{\omega^2 C V_0 (M - L_2)}{R(1 - \omega^2 L_2 C) + j\omega[(L_1 - M)(1 - \omega^2 L_2 C) + (L_2 - M)(1 - \omega^2 C M)]}$$

b. La frecuencia ω_1 que anula la corriente por la fuente, es aquella que cumple:

$$I_1(\omega_1) = 0 \iff \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} \quad (11)$$

Observando la expresión para la corriente I_1 , vemos que para $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$ se anula el numerador sin que se anule el denominador, entonces esa frecuencia es la buscada. Ahora evaluemos I_2 e I_C en esa frecuencia:

$$I_2(\omega_1) = \frac{V_0}{j\omega_1(L_2 - M)} = \frac{V_0 \sqrt{L_2 C}}{j(L_2 - M)} \quad (12)$$

$$I_C(\omega_1) = \frac{-\omega_1 C V_0}{j(1 - \omega_1^2 C M)} = -\frac{V_0 \sqrt{L_2 C}}{j(L_2 - M)} \quad (13)$$

Podemos ver que este resultado es coherente con la ley de nodos que decía $I_1 = I_2 + I_C$, pero como para ω_1 se anula I_1 entonces se tiene que cumplir que: $I_2 = -I_C$.

c. Ahora de forma similar hallemos ω_2 de forma que se anule I_2 :

$$I_2(\omega_2) = 0 \iff \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{CM}} \quad (14)$$

Nuevamente observando la expresión de I_2 podemos observar que la frecuencia $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{CM}}$ cumple que anula el numerador sin anular el denominador, por lo tanto esta frecuencia es la buscada. Evaluemos como quedan I_1 e I_C evaluadas en esa frecuencia:

$$I_1(\omega_2) = \frac{V_0(1 - \omega_2^2 L_2 C)}{(1 - \omega_2^2 L_2 C)[R + j\omega_2(L_1 - M)]} = \frac{V_0}{R + j\frac{L_1 - M}{\sqrt{CM}}} \quad (15)$$

$$I_C(\omega_2) = \frac{V_0 \omega_2^2 C(M - L_2)}{(1 - \omega_2^2 L_2 C)[R + j\omega_2(L_1 - M)]} = \frac{V_0}{R + j\frac{L_1 - M}{\sqrt{CM}}} \quad (16)$$

Podemos ver que esto también es coherente con la ley de nodos ya que cuando $I_2 = 0$, tenemos que $I_1 = I_C$ lo cual acabamos de verificar.

d. Ahora asumimos que $L_1 = L_2 = L$ y que no hay pérdidas en el acople entre las bobinas, por lo tanto $M = \sqrt{L_1 L_2} = L$. Imponiendo eso vemos que $I_C = 0$, y las corrientes I_1 e I_C cumplen:

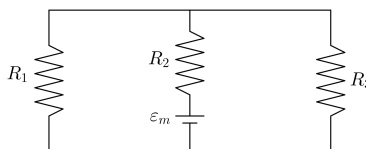
$$I_1 = \frac{V_0(1 - \omega^2 LC)}{R(1 - \omega^2 LC)} = \frac{V_0}{R} \quad (17)$$

$$I_2 = \frac{V_0(1 - \omega^2 CM)}{R(1 - \omega^2 LC)} = \frac{V_0}{R} \quad (18)$$

Este resultado nuevamente es coherente con la ley de nodos, ya que si $I_C = 0$ entonces $I_1 = I_2$

Problema 3

a. Consideremos que la sección S es constante a lo largo de todo el circuito y que el entre hierro es pequeño en comparación con el largo medio de las ramas del circuito. Por lo tanto, dado que la componente normal del campo magnético se conserva, el campo \vec{B} es constante en módulo a lo largo de cada rama del circuito. Además, si suponemos que $\mu \gg \mu_0$ entonces las líneas de campo magnético permanecen dentro del material y por lo tanto el flujo se conserva. Como resultado, si aplicamos las leyes de Kirchhoff para circuitos magnéticos, el sistema es equivalente al siguiente circuito eléctrico:



Donde $R_1 = R_3 = \frac{3l-z}{\mu S} + \frac{z}{\mu_0 S}$ y $R_2 = \frac{l}{\mu S}$ son las reluctancias de cada rama respectivamente y $\mathcal{E}_m = NI$ es la fmm.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{cases} \phi_1 R_1 - \phi_3 R_3 = 0 \\ NI - \phi_2 R_2 - \phi_3 R_3 = 0 \\ \phi_2 = \phi_1 + \phi_3 \end{cases}$$

- b. De la primer igualdad, dado que las ramas 1 y 3 son iguales, deducimos que $\phi_1 = \phi_3$. Luego, de la tercer igualdad tenemos que el flujo de la rama central es $\phi_2 = 2\phi_1 = 2\phi_3$. Finalmente, sustituyendo en la segunda igualdad, tenemos que:

$$NI - 2\phi_3 R_2 - \phi_3 R_3 = 0 \rightarrow \phi_3 = \frac{NI}{2R_2 + R_3} = \phi_1$$

Por lo tanto,

$$\phi_2 = \frac{2NI}{2R_2 + R_3}$$

De esto deducimos que los campos son:

$$B_1 = B_3 = \frac{NI}{S(2R_2 + R_3)}, \quad B_2 = \frac{2NI}{S(2R_2 + R_3)}$$

- c. Observemos que el mayor valor del campo se da en la rama central. Imponiendo que este valor del campo no sature, aseguramos que no lo haga en el resto del circuito. Por lo tanto, debemos imponer que:

$$\frac{2NI}{S(2R_2 + R_3)} < B_s$$

Que podemos escribir como:

$$\frac{2NI}{S B_s} < \frac{2l}{\mu S} + \frac{3l-z}{\mu S} + \frac{z}{\mu_0 S}$$

Suplantando que $\mu = \frac{B_s}{H_s}$ y despejando z tenemos que:

$$z > \mu_0 \frac{2NI - 5lH_s}{B_s - \mu_0 H_s}$$

El miembro derecho de esta desigualdad corresponde al menor valor de z , y la desigualdad debe ser estricta para que no exista saturación.