Solución Examen 20/12/2018

Ejercicio 1

a) $\vec{E}_0(r)=C\left(x\hat{i}+y\hat{j}-2z\hat{k}\right)$, tiene rotor nulo por lo que deriva de un potencial.

Viendo la forma del campo, podemos pensar en un potencial que sea menos la integral de cada componente sumada. Proponemos:

$$\phi_0=C\left(a_z z^2+a_x x^2+a_y y^2\right) \quad .$$

Verificamos tomando el gradiente:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi_0=-C\,2a_z z\hat{k}-C a_x 2x\hat{i}-C\,2a_y y\hat{j}$$

Entonces, $a_z=1$, $a_x=\frac{-1}{2}$, $a_y=\frac{-1}{2}$,

$$\phi_0=C\left(z^2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)=C r^2\left(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)=C r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)=C r^2 P_2\left(\cos\theta\right)$$

Esta expresión es un caso particular de la solución general de la solución de Laplace, y por lo tanto es una solución.

b) El campo eléctrico es irrotacional, es decir que existe un potencial eléctrico:

$$\nabla\times\vec{E}=0\Longrightarrow\vec{E}=-\nabla\phi$$

Además, no hay densidades de carga eléctrica por lo que
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\Longrightarrow\nabla^2\phi=0$ fuera de la esfera.

c) i- La esfera es conductora, por lo cual el campo eléctrico en su interior debe ser nulo, y el potencial electrostático constante. El potencial electrostático es continuo en todo el espacio. Entonces el potencial en r=R es constante.

ii- En el infinito el efecto de la esfera es despreciable y se debe recuperar el campo $\vec{E}_0(r)$, por lo que el potencial lejos debe ser $\phi=C\left(z^2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)+C_2=C r^2 P_2\left(\cos\theta\right)+C_2$ más algún término que decaiga más rápido que $1/r^2$, porque al estar la esfera descargada, no hay término de orden $1/r$.

d) Como la condiciones de borde para el potencial involucran constantes y el término $P_2\left(\cos\theta\right)$ de la solución general de Laplace en esféricas, tomamos el potencial con esos dos términos y si se logran verificar todas las condiciones de borde, por unicidad es la solución al problema.

$$\phi = cte + \left(\frac{a}{r^3} + b r^2\right) P_2(\cos\theta)$$

$$\phi(r\to\infty) \to \left(b r^2\right) P_2(\cos\theta) = C r^2 P_2(\cos\theta) \Longrightarrow b = C$$ y $$cte = C_2$$

$$\phi(R) = \left(\frac{a}{R^3} + C R^2\right) P_2(\cos\theta) + cte = cte$$

$$\frac{a}{R^3} = -C R^2 \Longrightarrow a = -C R^5$$, entonces la solución es

$$\phi = C_2 + C\left(r^2 - \frac{R^5}{r^3}\right) P_2(\cos\theta)$$.

d) Para obtener el campo eléctrico tomamos el gradiente en coordenadas esféricas:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{-\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{E} = \left(-2Cr - \frac{3 C R^5}{r^4}\right) P_2(\cos\theta)\hat{e}_r + C\left(r - \frac{R^5}{r^4}\right) 3\cos\theta\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{E} = -2Cr\left(1 + \frac{3R^5}{2r^5}\right) P_2(\cos\theta)\hat{e}_r + Cr\left(1 - \frac{R^5}{r^5}\right) 3\cos\theta\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

e) $\sigma(R)(r=R) = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{e}_r = -5\,CR\,\varepsilon_0 P_2(\cos\theta)$

Ejercicio 2

a) Mirando el primer bobinado tenemos:

$$V_1 = \frac{d\Phi_T}{dt} = N_1\frac{d\Phi}{dt} = N_1 j\omega\Phi$$

b) El flujo que pasa por sistema está dado por:

$$\frac{V_1}{N_1 j\omega} = \Phi$$

Por lo que su amplitud es $\frac{V_1}{N_1\omega}$, entonces planteando la condición para el campo máximo es:

$$B = \frac{V_1}{N_1\omega S} < B_{sat} \Longrightarrow N_1 > \frac{V_1}{B_{sat}\,\omega S}$$

Entonces el valor mínimo es $N_1 = \frac{V_1}{B_{sat}\,\omega S}$

c) Para esto debemos trabajar el sistema como circuito magnético:

$$\Phi R_{eq}=\Phi\frac{4l}{\mu S}=N_1 I_1+N_2 I_2\Longrightarrow\Phi=\frac{\mu S}{4l}(N_1 I_1+N_2 I_2)$$

$$L_1=N_1\frac{d\Phi}{dI_1}=N_1^2\frac{\mu S}{4l}$$

$$L_2=N_2\frac{d\Phi}{dI_2}=N_2^2\frac{\mu S}{4l}$$

$$M_{12}=M_{21}=N_1\frac{d\Phi}{dI_2}=N_1 N_2\frac{\mu S}{4l}=\sqrt{L_1 L_2}$$

También se podría argumentar que el flujo que pasa por ambas bobinas es el mismo, y por ende la inductancia mutua es completa y verifica $L_1 L_2=M^2$.

d) El flujo que pasa por cada bobinado es el mismo,

$$V_1=\frac{d\Phi_T}{dt}=N_1\frac{d\Phi}{dt}=N_1 j\omega\Phi$$

$$V_2=\frac{d\Phi_T}{dt}=N_2\frac{d\Phi}{dt}=N_2 j\omega\Phi$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2}$$

e) Para hallar las corrientes estudio ambas mallas:

$$V_1-j\omega L_1 I_1-j\omega M I_2=0$$

$$-j\omega L_2 I_2-j\omega M I_1-\frac{1}{j\omega C}I_2=0$$

$$j\omega M I_1=j\left(-\omega L_2+\frac{1}{\omega C}\right)I_2\Longrightarrow I_1=\frac{1}{\omega M}\left(-\omega L_2+\frac{1}{\omega C}\right)I_2$$

$$V_1-jL_1\frac{1}{M}\left(-\omega L_2+\frac{1}{\omega C}\right)I_2-j\omega M I_2=0\Longrightarrow I_2=\frac{V_1}{-j\omega M-jL_1/M\left(-\omega L_2+\frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$I_2=\frac{V_1 Mj}{\omega M^2+L_1\left(-\omega L_2+\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{jV_1 M}{\omega L_1 L_2-\omega L_2 L_1+L_1/\omega C}=\frac{jV_1\omega CM}{L_1}$$

$$i_2(t)=\frac{V_1\omega CM}{L_1}\sin\omega t$$

$$I_1=\left(-\omega L_2+\frac{1}{\omega C}\right)\frac{jC}{L_1}V_1$$

$$i_1(t)=\frac{V_1 C}{L_1}\left(-\omega L_2+\frac{1}{\omega C}\right)\sin\omega t$$

f) La potencia instantánea entregada por la fuente es:

$P(t)=V_1 cos\omega t \frac{V_1 \omega CM}{L_1} sin\omega t$, su media temporal es nula.

Ejercicio 3.

a) El campo eléctrico entre placas paralelas es:

$$\vec{E}(r,t)=\frac{\sigma(r,t)}{\varepsilon_0}\hat{k}$$

La densidad de carga $\sigma(t)$ se puede obtener aplicando la ec. de continuidad

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Longrightarrow \int \vec{J}\cdot\hat{n}\,da=-\int\frac{\partial\rho}{\partial t}dV \Longrightarrow$$

$$\int \vec{J}\cdot(-\hat{k})da=-\int\frac{\partial\rho}{\partial t}dV \Longrightarrow I=\acute{Q}_T(t),\sigma(t)=\frac{It}{\pi R^2}$$

Para una superficie de radio $r<R$, la densidad de carga es la misma

$$\acute{Q}_{enc}(t)=\acute{Q}_T(t)r^2/R^2$$

$$\acute{Q}_{enc}(t)=\frac{Ir^2}{R^2}, entonces\,\sigma(t)=\frac{Q_{enc}}{\pi r^2}=\frac{It}{\pi R^2}$$

El campo eléctrico es:

$$\vec{E}(r,t)=\frac{I}{\varepsilon_0 S}t\hat{k}$$, donde S es la superficie considerada.

b) La corriente de desplazamiento es:

$$\vec{J}_d=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\varepsilon_0=\frac{I}{S}\hat{k}\Longrightarrow I_d=\int\vec{J}\cdot\hat{k}\,da=I$$

El campo magnético es:

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_d=\mu_0\frac{I}{S}\hat{k}$$

Tomando un anillo amperiano de radio r , y considerando el campo magnético según $\hat{e}_\theta$

$$B\,2\pi r=\mu_0\frac{I}{S}\pi r^2\Longrightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0 Ir}{2S}\hat{e}_\theta \quad .$$

c) La densidad de energía electromagnética es:

$$u_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\frac{Ir}{2S}\frac{\mu_0 Ir}{2S}=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8S^2}$$

$$u_e=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}=\frac{1}{2}\frac{I}{\varepsilon_0 S}t\frac{I}{S}t=\frac{I^2t^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

$$u_{EM}=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8S^2}+\frac{I^2 t^2}{2\varepsilon_0 S^2}=\frac{I^2}{2\left(\pi R^2\right)^2}\left(\frac{\mu_0 r^2}{4}+\frac{t^2}{\varepsilon_0}\right)$$

Vector de Poynting:

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{I}{\varepsilon_0 \pi R^2}t\hat{k}\times\frac{Ir}{2\pi R^2}\hat{e}_\theta=\frac{-I^2}{2\left(\pi R^2\right)^2}\frac{tr}{\varepsilon_0}\hat{e}_r$$

d)

$$U(t)=\int u_{EM}\,dV=\int\frac{I^2}{2S^2}\left(\frac{\mu_0 r^2}{4}+\frac{t^2}{\varepsilon_0}\right)dz\,r\,dr\,d\,\theta=\frac{I^2}{2\pi R^2}\left(\frac{\mu_0 R^2}{8}+\frac{t^2}{\varepsilon_0}\right)d$$

Tasa de aumento de energía entre las placas: $\frac{dU(t)}{dt}=\frac{I^2}{\pi R^2}\frac{t}{\varepsilon_0}d$

Potencia entrante:

$$P=\int\vec{S}\cdot\left(-\hat{e}_r\right)da=\int\frac{I^2}{2S^2}\frac{tR}{\varepsilon_0}da=\frac{I^2}{2\left(\pi R^2\right)^2}\frac{tR}{\varepsilon_0}2\pi Rd=\frac{I^2}{\pi R^2}\frac{t}{\varepsilon_0}d$$

Es igual a la tasa de aumento de energía entre las placas.