Solución examen Febrero

Ejercicio 1

a) Como el problema es electrostático:

$$\nabla \times \vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\nabla \phi$$

Como no hay densidad de carga libre en la región dentro de las placas,

$$\nabla \cdot \vec{E}=0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \phi=\nabla^2 \phi=0$$

b) Condiciones de borde:

$$1:\phi(x=0,y)=0, 2:\phi(x=a,y)=0, 3:\phi(x,y=0)=0, 4:\phi(x,y=b)=V_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

c) Laplaciano en cartesianas:

$$\nabla^2 \phi=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=G(y)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}+F(x)\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{1}{F(x)}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{G(y)}\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2}=0$$

Para que sea posible, ambos términos deben ser una constante:

$$\frac{1}{F(x)}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{G(y)}\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{1}{F(x)}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}=-M$$

$$\frac{1}{G(y)}\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2}=M$$

donde M es una constante, por ahora arbitraria.

Si fuera $M=-k^2<0$, la solución de la ecuación para $F(x)$ tendría la forma

$$F(x)=Cexp(ky)+Dexp(-ky)$$

Como las condiciones de borde 1 y 2 implican que F(0)=F(a)=0, se necesitan soluciones que se anulen en dos puntos, lo que es imposible con la solución anterior. Por lo tanto, debe ser $M=k^2$ con k mayor o igual a cero. En consecuencia la forma de las soluciones es:

$$F(x)=Acos(kx)+Bsin(kx)$$
$$G(y)=Cexp(ky)+Dexp(-ky)$$

Si imponemos las condiciones de borde 1 y 2:

$$F(0)=0, F(a)=0 \rightarrow F(x)=B_n \sin(n\pi x/a)$$

Si imponemos la condición de borde 3:

$G(0)=0 \rightarrow G(y)=C_n \sinh(n\pi y/a)$

La solución general será una combinación de las soluciones obtenidas por separación de variables:

$$\phi(x,y)=\sum_n C_n \sin(n\pi x/a)\sinh(n\pi y/a)$$

donde las constantes B_n pudieron ser absorbidas en una redefinición de las constantes C_n. Ahora imponemos la condición de borde 4:

$$\phi(x,b)=\sum_n C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)=V_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

Como las funciones trigonométricas son una base de las funciones periódicas, podemos identificar término a término y solo sobrevive la componente $n=3$, $C_3 \sinh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)=V_0$

Concluimos que:

$$\phi(x,y)=\frac{V_0}{\sinh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{3\pi y}{a}\right)$$

d) El campo eléctrico es:

$$\vec{E}(x,y)=-\vec{\nabla}\phi(x,y)=\frac{-V_0 3\pi/a}{\sinh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)}\left[\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{3\pi y}{a}\right)\hat{i}+\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{3\pi y}{a}\right)\hat{j}\right]$$

e) La densidad de carga superficial en un conductor verifica:

$$\sigma=\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}$$

dónde el vector $\hat{n}$ es un vector normal a la superficie saliente a la misma. Aplicándolo a cada una de las superficies se obtiene.

$$\sigma(x=0,y)=\varepsilon_0 \vec{E}(0,y)\cdot\hat{i}=\frac{-\varepsilon_0 V_0 3\pi/a}{\sinh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)}\sinh\left(\frac{3\pi y}{a}\right)$$

$$\sigma(x=a,y)=\varepsilon_0 \vec{E}(a,y)\cdot(-\hat{i})=\frac{-\varepsilon_0 V_0 3\pi/a}{\sinh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)}\sinh\left(\frac{3\pi y}{a}\right)$$

$$\sigma(x,0)=\varepsilon_0 \vec{E}(x,0)\cdot\hat{j}=\frac{-\varepsilon_0 V_0 3\pi/a}{\sinh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

$$\sigma(x,b)=\varepsilon_0 \vec{E}(x,b)\cdot(-\hat{j})=\frac{\varepsilon_0 V_0 3\pi/a}{\tanh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

Ejercicio 2

a) Para hallar el campo magnético utilizamos que la divergencia del mismo es nula. En coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(B_\rho\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(B_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(B_\rho\rho)}{\partial\rho}+K\Longrightarrow B_\rho\rho=\frac{-K\rho^2}{2}+f(z)$$
$$\Longrightarrow B_\rho=\frac{-K\rho}{2}+\frac{f(z)}{\rho}$$

La función $f(z)$ debe de ser nula pues el campo está acotado sobre el eje. Si fuera distinta de cero al tender la distancia ρ a cero el campo divergería. Se deduce que la componente radial del campo es:

$$B_\rho=\frac{-K\rho}{2}$$

b) Para obtener la fuerza magnética en el anillo, necesitamos de la corriente inducida en el mismo. La corriente inducida es en el sentido de $-\hat{e}_\theta$, porque la corriente inducida se opone a la variación del flujo magnético que la genera, por tanto la fuerza es:

$$\vec{F}=-I\oint dl\,\hat{e}_\theta\times\vec{B}=-I\oint dl\,\hat{e}_\theta\times\left[(B_0+Kz)\hat{e}_z-\frac{K\rho}{2}\hat{e}_\rho\right]$$
$$\Longrightarrow\vec{F}=-I\oint(B_0+Kz)\,dl\,\hat{e}_\rho-I\oint\frac{K\rho}{2}dl\,\hat{e}_z=-I\oint\frac{K\rho}{2}dl\,\hat{e}_z=-IKa^2\pi\,\hat{e}_z$$

Aquí se utilizó que La integral de $\hat{e}_\rho$ es cero. Entonces,

$$\vec{F}=-IKa^2\pi\,\hat{e}_z$$

Donde I se refiere al valor de la corriente inducida. Como Kes negativo, la fuerza apunta hacia arriba.

c) Hallemos la relación de la corriente inducida con la velocidad:

$$I=\frac{-\varepsilon_i}{R}=\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot\hat{e}_z da=\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\int(B_0+Kz)da=\frac{\pi a^2}{R}\frac{d(B_0+Kz)}{dt}=\frac{-\pi a^2 K}{R}v$$

pues $v=\frac{-dz}{dt}$.

d) Para determinar la velocidad del anillo realizamos un balance de fuerzas entre el peso y la fuerza magnética sobre el anillo. La segunda ley de Newton dice:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-F=mg+IKa^2\pi$$

Estamos considerando la velocidad positiva hacia $-\hat{e}_z$

$$m\frac{dv}{dt}=mg-F=mg-\frac{\pi a^2K}{R}vKa^2\pi\Longrightarrow\frac{dv}{dt}+\frac{(\pi a^2K)^2}{mR}v=g$$

$$\frac{dv}{dt}+cv=g,c=\frac{(\pi a^2K)^2}{mR}$$

Si se espera mucho tiempo la derivada de la velocidad tiende a cero y por lo tanto, la velocidad tiende a su valor asintótico: $v_{asin}=g/c$

La intensidad correspondiente es: $I_{asin}=\frac{g}{m\pi a^2|k|}$.

e) La solución general es suma de la solución de la homogénea y de la particular hallada en la sección anterior:

$$v = Ae^{-ct} + \frac{g}{c}$$

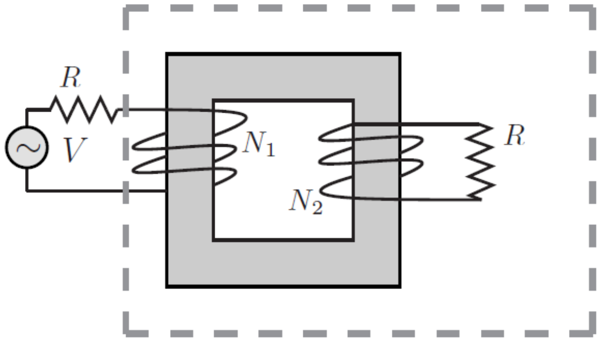
Si se impone la condición inicial:

$$v(0) = 0 \Longrightarrow A = \frac{-g}{c}$$

Se llega a la solución partiendo del reposo:

$$v = \frac{g}{c}\left(1 - e^{-ct}\right), c = \frac{\left(\pi a^2 K\right)^2}{mR}$$

Ejercicio 3



a) Circuito magnético -

$$\Phi R_{eq} = \Phi \frac{4l}{\mu S} = N_1 I_1 + N_2 I_2 \Longrightarrow \Phi = \frac{\mu S}{4l}\left(N_1 I_1 + N_2 I_2\right)$$

$$L_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dI_1} = N_1^2 \frac{\mu S}{4l}$$

$$L_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dI_2} = N_2^2 \frac{\mu S}{4l}$$

$$M_{12} = M_{21} = N_2 \frac{d\Phi}{dI_1} = N_1 N_2 \frac{\mu S}{4l} = \sqrt{L_1 L_2}$$

b) Queremos el Z_{eq} que puede sustituir el circuito de la siguiente forma:

$$V = \left(i\omega L_1 + R\right) I_1 + i\omega M I_2 \, malla\, 1$$

$$0 = i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 + R I_2 \, malla\, 2$$

Lo que interesa resolver es

$$V' = V - R I_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 = Z_{eq} I_1$$

Para ello, despejemos de la malla2

$$0 = i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 + R I_2 \Longrightarrow I_2 = \frac{-i\omega M I_1}{i\omega L_2 + R}$$

$$V' = i\omega L_1 I_1 - i\omega M \frac{i\omega M I_1}{i\omega L_2 + R} = \left(i\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{i\omega L_2 + R}\right) I_1 = Z_{eq} I_1$$

$$Z_{eq}=\left(i\omega L_1+\frac{\omega^2 M^2}{i\omega L_2+R}\right)=\frac{\omega^2\left(M^2-L_1L_2\right)+i\omega L_1 R}{i\omega L_2+R}$$

$$Z_{eq}=\frac{\left(\omega^2\left(M^2-L_1L_2\right)+i\omega L_1 R\right)\left(R-i\omega L_2\right)}{\left(\omega L_2\right)^2+R^2}=\frac{i\omega L_1 R}{i\omega L_2+R}$$

dónde se utilizó para la última igualdad que $M^2=L_1L_2$.

c) Calculemos I_1, cuando $N_1=N_2$. En este caso, $L_1=L_2=M$, llamaremos a las tres L. Para esto podemos resolver de cero a ambas mallas, o aplicar las condiciones a Z_{eq}.

$$Z_{eq}=\frac{\left(\omega^2L^2R+i\omega L R^2\right)}{\left(\omega L\right)^2+R^2}$$

$$V'=V-R I_1=Z_{eq} I_1\Longrightarrow V=\left(R+Z_{eq}\right) I_1\Longrightarrow I_1=\frac{V}{R+Z_{eq}}$$

$$R+Z_{eq}=\frac{\left(\omega^2L^2R+i\omega L R^2\right)}{\left(\omega L\right)^2+R^2}+R=\frac{\left(\omega^2L^2R+i\omega L R^2+R^3+\omega^2L^2R\right)}{\left(\omega L\right)^2+R^2}=R\frac{\left(2\omega^2L^2+i\omega LR+R^2\right)}{\left(\omega L\right)^2+R^2}$$

$$\left|R+Z_{eq}\right|=\frac{R\sqrt{\left(2\left(\omega L\right)^2+R^2\right)^2+\left(R\omega L\right)^2}}{\left(\omega L\right)^2+R^2},\theta=artg\left(\frac{R\omega L}{2\left(\omega L\right)^2+R^2}\right)$$

$$I_1(t)=\frac{V}{\left|R+Z_{eq}\right|e^{i\theta}}e^{i\omega t}=\frac{V}{\left|R+Z_{eq}\right|}e^{i(\omega t-\theta)}$$

Tomando la parte real:

$$i_1(t)=\frac{V\left(\left(\omega L\right)^2+R^2\right)}{R\sqrt{\left(2\left(\omega L\right)^2+R^2\right)^2+\left(R\omega L\right)^2}}\cos\left(\omega t-\theta\right)$$