

2do. Parcial de ELECTROMAGNETISMO 01/12/2017
Instituto de Física – Facultad de Ingeniería (UdelaR)

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones satisface las condiciones para ser un campo de inducción magnética?

I)	II)	III)		
$\vec{B} = \frac{B_0 \rho}{a} \hat{e}_\rho$ Coordenadas cilíndricas	$\vec{B} = \frac{B_0}{a^2} y(x\hat{i} - z\hat{k})$ Coordenadas cartesianas	$\vec{B} = \frac{B_0 a^2}{r^2} \sin\theta \hat{e}_\theta$ Coordenadas esféricas		
a) Sólo II y III	b) Sólo II	c) Sólo I	d) Todas	e) Sólo I y II

Nota: a es un parámetro que se mide en metros.

Solución:

Para que sea un campo magnético debe tener divergencia nula siempre y rotor no nulo en alguna región del espacio.

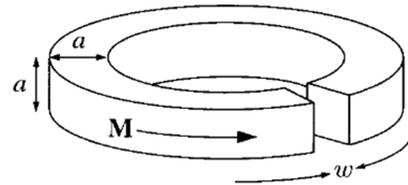
$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{B_0 2\rho}{a} \neq 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{B_0}{a^2} y(1 - 1) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta B_\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{B_0 a^2}{r^2} \sin\theta^2 \right) = \frac{2B_0 a^2}{r^3} \cos\theta \neq 0$$

La única posibilidad es la b), además se verifica fácilmente que tiene rotor no nulo en una región del espacio.

2. Un toroide de hierro de diámetro medio D y sección cuadrada de lado a , presenta un pequeño entrehierro de ancho w (como muestra la figura). Sabiendo que el toroide tiene una magnetización $\vec{M} = M\hat{e}_\phi$ (constante y uniforme, ver figura) encuentre la inducción magnética en el entrehierro.



a)	b)	c)	d)	e)
$B = \mu_0 M$	$B = \frac{M^2}{\mu_0}$	$B = \frac{\mu_0 M (\pi D - w)}{\pi D}$	$B = \frac{\mu_0 M (\pi D - w)^2}{(\pi D + w)^2}$	$B = \frac{\mu_0 M w}{\pi D}$

Solución:

Si aplicamos Ampère sobre el toroide:

$$\oint H \cdot dl = 0 = \phi \mathcal{R} + H(\pi D - w) = 0$$

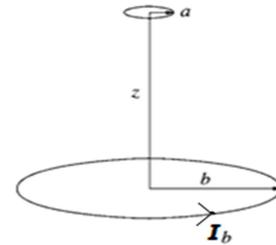
$$\mathcal{R} = \frac{w}{\mu_0 S}, \quad H = \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{\phi}{\mu_0 S} - M$$

$$\rightarrow \phi \frac{w}{\mu_0 S} + \left(\frac{\phi}{\mu_0 S} - M \right) (\pi D - w) = 0 = \frac{\phi}{\mu_0 S} \pi D - M(\pi D - w)$$

$$\rightarrow B = \mu_0 M \frac{(\pi D - w)}{\pi D}$$

3. Considere dos espiras de radio a y b ($b \gg a$), colocadas como muestra la figura. Por la espira inferior circula una corriente I_b constante. La espira pequeña tiene una resistencia R .

¿Cuál es la corriente inducida en la espira superior de radio a en el momento en que se encuentra a una distancia z de la espira inferior y se está acercando a ella con una velocidad constante de módulo v ?



a)	b)	c)
$I_a = \frac{5 \mu_0 \pi v}{2 R} \frac{b^2 a^2 z}{(z^2 + b^2)^{5/2}} I_b$	$I_a = -\frac{5 \mu_0 \pi v}{R} \frac{b^2 a^2}{(z^2 + b^2)^4} I_b$	$I_a = -\frac{3 \mu_0 \pi v}{2 R} \frac{b^2 a^2 z}{(z^2 + b^2)^{5/2}} I_b$
d)	e)	
$I_a = \frac{3 \mu_0 \pi v}{2 R} \frac{b^2 a^2 z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} I_b$	$I_a = -\frac{3 \mu_0 \pi v}{R} \frac{b^2 a^2}{(z^2 + a^2)^4} I_b$	

Nota: El sentido positivo de las corrientes es el que se muestra como corriente I_b .

Solución:

Sabemos (sino el cálculo es sencillo) que el campo magnético que produce una espira a una distancia z encima de ella en su eje, es en la dirección \hat{k} y vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_b}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Como consideramos que la espira superior es mucho más chica, el flujo que pasa por la misma es simplemente

$$\phi = \frac{\mu_0 I_b}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \pi a^2$$

Y la fem inducida:

$$Fem = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_b}{2} \frac{b^2 \pi a^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

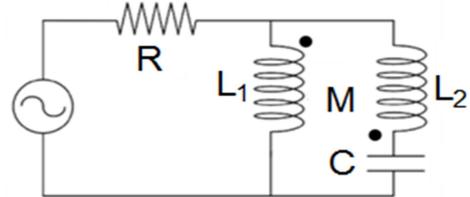
La variación temporal está en la variable z , con $v = -dz/dt$

$$F_{em} = -\frac{d\phi}{dt} = 3 \frac{\mu_0 I_b}{2} \frac{b^2 \pi a^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} z \frac{dz}{dt} = -3 \frac{\mu_0 I_b}{2} \frac{b^2 \pi a^2 z v}{(b^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Entonces, la corriente inducida es:

$$I_a = \frac{F_{em}}{R} = -\frac{3\mu_0 I_b}{2R} \frac{b^2 \pi a^2 z v}{(b^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

4. El circuito de la figura está alimentado por una fuente de voltaje alterna $v(t) = V_0 \sin \omega t$. Considerando que $L_1 = 4L_2$ y $M = L_2$, ¿para qué frecuencia la corriente por la resistencia es nula?



a)	b)	c)	d)	e)
$\omega^2 = \frac{1}{7L_2C}$	$\omega^2 = \frac{1}{L_2C}$	$\omega^2 = \frac{1}{4L_2C}$	$\omega^2 = \frac{1}{3L_2C}$	$\omega^2 = \frac{1}{8L_2C}$

Solución:

Recorriendo la malla sin el capacitor:

$$V_0 = RI_T + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2$$

Recorriendo la malla con el capacitor:

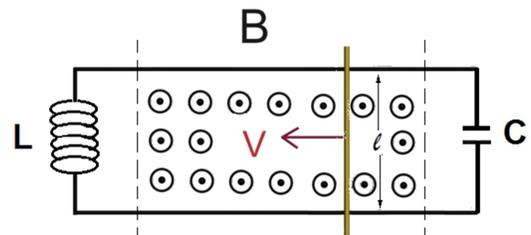
$$V_0 = RI_T + j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 - \frac{j}{\omega C} I_2$$

Además: $I_T = I_1 + I_2 = 0 \rightarrow I_1 = -I_2$

$$V_0 = j\omega(L_1 + M)I_1, \quad V_0 = -j\omega\left(L_2 + M - \frac{1}{C\omega^2}\right)I_1$$

$$L_1 + M = -\left(L_2 + M - \frac{1}{C\omega^2}\right) \rightarrow L_1 + L_2 + 2M = \frac{1}{C\omega^2} = 7L_2 \rightarrow \omega^2 = 1/7CL_2$$

5. Una barra conductora de masa m y largo ℓ puede deslizar sin fricción con velocidad v por dos guías conductoras en una región donde actúa un campo de inducción magnética uniforme y constante B , como muestra la figura. El circuito formado por las guías se cierra con una bobina L y un condensador C . Despreciando la autoinductancia de la barra y los rieles y las resistencias de todos los elementos del



circuito, calcular la frecuencia de oscilación de la barra. Considere: $m/B^2l^2 = C$

a)	b)	c)	d)	e)
$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$	$\omega = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$	$\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}$	$\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$

Solución:

La fuerza sobre la barra es:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} = -Bl\hat{i} = -Bl(I_1 + I_2)\hat{i}$$

Con \hat{i} versor en el plano hacia la derecha. Si llamamos I_1 a la corriente que circula por la rama de la bobina, e I_2 a la que circula por la rama del capacitor, la corriente I por la barra será la suma de ambas $I = I_1 + I_2$.

Por la segunda ley de newton: $m \frac{dv}{dt} = -Bl(I_1 + I_2) \rightarrow m\dot{v} = -Bl(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$

Ahora, si recorremos ambas ramas, tenemos que:

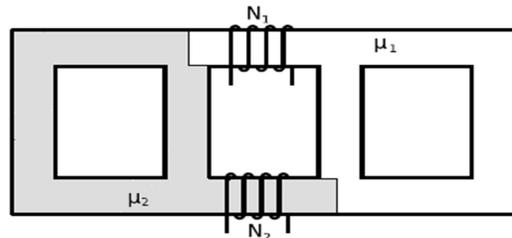
$$Fem = \frac{q}{C} = L \frac{dI_1}{dt} = Blv$$

$$\dot{q} = I_2 = Bl\dot{v}C \quad y \quad \dot{I}_1 = Blv/L$$

$$m\dot{v} = -Bl(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = -Bl\left(\frac{Blv}{L} + Bl\dot{v}C\right) \rightarrow (m + B^2l^2C)\dot{v} = -\frac{B^2l^2v}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{B^2l^2}{L(m + B^2l^2C)} = \frac{1}{2LC}$$

6. El circuito magnético de la figura está conformado por un núcleo de dos materiales lineales de permeabilidad μ_1 y μ_2 con $\mu_2 = \mu_1/2$ y sección transversal uniforme S . Las ramas laterales tienen largos medios $3l$ y las centrales l . En las ramas centrales hay dos conductores enrollados (de N_1 y N_2 vueltas) como se muestra en la figura. Halle el módulo de la inductancia mutua entre los enrollados, donde definimos $L = N_1N_2 \frac{\mu_1 S}{l}$.

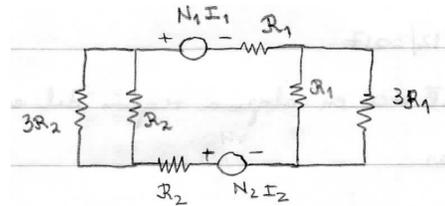


a)	b)	c)	d)	e)
----	----	----	----	----

$M = \frac{2}{7}L$	$M = \frac{1}{3}L$	$M = \frac{7}{18}L$	$M = \frac{6}{35}L$	$M = \frac{4}{21}L$
--------------------	--------------------	---------------------	---------------------	---------------------

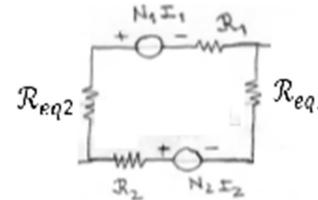
Solución:

Usemos la nomenclatura de la figura, y suponemos $I_2 = 0$, tal que el flujo $\phi_2 = MI_1$. Con $\mathcal{R}_1 = \frac{l}{\mu_1 S}$ y $\mathcal{R}_2 = \frac{l}{\mu_2 S}$



Hallemos la reluctancia equivalente de todo el circuito:

$$\mathcal{R}_{eq1} \rightarrow \frac{1}{\mathcal{R}_{eq1}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{3\mathcal{R}_1} \rightarrow \mathcal{R}_{eq1} = \frac{3}{4}\mathcal{R}_1 = \frac{3}{4} \frac{l}{\mu_1 S}$$

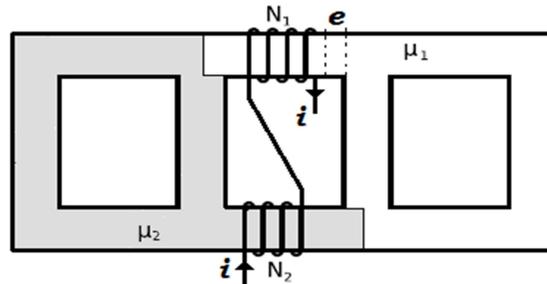


Lo mismo para $\mathcal{R}_{eq2} = \frac{3}{4}\mathcal{R}_2 = \frac{3}{4} \frac{l}{\mu_2 S}$.

$$\begin{aligned} N_1 I_1 &= \phi_2 \mathcal{R}_{eqT} = \phi_2 (\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \\ &= \phi_2 \left[\frac{7}{4} \frac{l}{\mu_1 S} + \frac{7}{4} \frac{l}{\mu_2 S} \right] \end{aligned}$$

$$\phi_{2T} = \frac{4N_1 N_2 I_1 \mu_1 S}{21l} \rightarrow M = \frac{4}{21}L$$

7. En el mismo circuito del ejercicio anterior se conectan los enrollados como se muestra en la figura. Considere el tramo de material con permeabilidad μ_1 y de ancho e , señalado en la figura. Cuando circula una corriente i por los bobinados, la energía magnética que almacena ese tramo es:



a)	b)	c)
$U = \frac{16\mu_1 Se}{21^2 l^2} (N_1 - N_2)^2 i^2$	$U = \frac{2\mu_1 Se}{9^2 l^2} (N_1 + N_2)^2 i^2$	$U = \frac{8\mu_1 Se}{21^2 l^2} (N_1 - N_2)^2 i^2$
d)	e)	
$U = \frac{\mu_1 Se}{12^2 l^2} (N_1 + N_2)^2 i^2$	$U = \frac{4\mu_1 Se}{9^2 l^2} (N_1 - N_2)^2 i^2$	

Nota: Recuerde que $\mu_2 = \mu_1/2$.

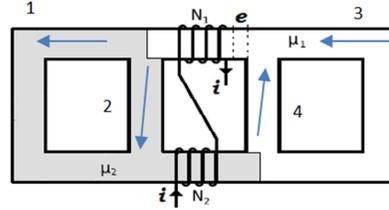
Solución:

La energía magnética almacenada en dicha región es:

$$U = \frac{1}{2} e S \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{e S}{\mu_1} B^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{\mu_1 S} \phi_e^2$$

Hay que calcular B o H en la región punteada. Si miramos las dos ramas de los costados, tenemos:

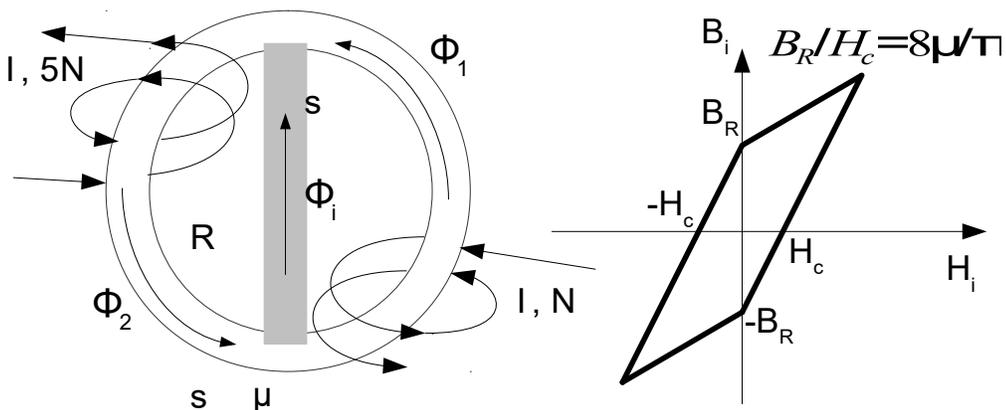
$$\begin{aligned} \phi_1 3 \frac{l}{\mu_2 S} - \phi_2 \frac{l}{\mu_2 S} &= 0 \rightarrow \phi_2 = 3\phi_1 \\ \phi_3 3 \frac{l}{\mu_1 S} - \phi_4 \frac{l}{\mu_1 S} &= 0 \rightarrow \phi_4 = 3\phi_3 \\ \phi_e &= \phi_1 + \phi_2 = 4\phi_1 \text{ y } \phi_e = \phi_3 + \phi_4 \\ &= 4\phi_3 \rightarrow \phi_1 = \phi_3 \end{aligned}$$



Si miramos el circuito del medio:

$$\begin{aligned} \phi_e \frac{l}{\mu_1 S} + \phi_2 \frac{l}{\mu_2 S} + \phi_3 \frac{l}{\mu_2 S} + \phi_4 \frac{l}{\mu_1 S} &= (N_1 - N_2)I \\ \left(\frac{l}{\mu_1 S} + \frac{l}{\mu_2 S} \right) (\phi_e + \phi_2) &= (N_1 - N_2)I \\ \left(\frac{l}{\mu_1 S} + \frac{2l}{\mu_1 S} \right) \left(\phi_e + \frac{3}{4} \phi_e \right) &= (N_1 - N_2)I \rightarrow \phi_e = 4(N_1 - N_2)I \mu_1 S / 21l \\ U &= \frac{8e \mu_1 S}{21^2 l^2} ((N_1 - N_2)I)^2 \end{aligned}$$

8. El circuito magnético de la figura está formado por un núcleo de material magnético lineal de permeabilidad μ en forma de aro de radio R y sección transversal S . La rama central (de sección S y largo $2R$) es un imán no lineal cuya curva de histéresis se observa en la figura adjunta. Por los bobinados circula la misma corriente I . Uno de los bobinados (bobinado 1) tiene N vueltas y el otro (bobinado 2) tiene $5N$ vueltas. Tomando las corrientes en los bobinados en los sentidos que se muestran, y los flujos en las ramas del circuito en los sentidos definidos en la figura, halle el valor del campo magnético remanente del imán B_R para que el flujo Φ_2 sea la mitad que Φ_1 .



a)	b)	c)	d)	e)
$B_R = \frac{4\mu NI}{\pi R}$	$B_R = \frac{8\mu NI}{\pi R}$	$B_R = \frac{14\mu NI}{\pi R}$	$B_R = \frac{24\mu NI}{\pi R}$	$B_R = \frac{10\mu NI}{\pi R}$

Solución:

Primero, las curvas del imán serian:

$$B_i = \frac{B_R}{H_c} H_i \pm B_R$$

Ahora, debemos resolver el circuito magnético:

$$\begin{aligned} \phi_i + \phi_1 = \phi_2 = \frac{\phi_1}{2} \rightarrow \phi_i = -\frac{\phi_1}{2} \\ 5NI = \frac{\phi_2 \pi R}{\mu S} + 2RH_i \rightarrow 5NI = \frac{\pi R \phi_1}{\mu S 2} + 2RH_i \\ NI = \frac{\phi_1 \pi R}{\mu S} - 2RH_i \rightarrow NI = \frac{\pi R}{\mu S} \phi_1 - 2RH_i \end{aligned}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por -1/2 y las sumamos

$$\rightarrow \frac{9NI}{2} = 3RH_i \rightarrow H_i = \frac{3NI}{2R}$$

Si sumamos las dos ecuaciones

$$6NI = \frac{\pi R 3}{\mu S 2} \phi_1 \rightarrow \phi_1 = \frac{4NI\mu S}{\pi R} \rightarrow \phi_i = -\frac{\phi_1}{2} = -\frac{2NI\mu S}{\pi R} \rightarrow B_i = -\frac{2NI\mu}{\pi R}$$

Entonces, el signo de H_i y B_i son distintos, es la curva con menos:

$$\begin{aligned} B_i = \frac{8\mu}{\pi} H_i - B_R \rightarrow -\frac{2NI\mu}{\pi R} = \frac{8\mu 3NI}{\pi 2R} - B_R \\ -\frac{2NI\mu}{\pi R} = \frac{12\mu NI}{\pi R} - B_R \rightarrow B_R = \frac{14\mu NI}{\pi R} \end{aligned}$$

TABLA DE OPERADORES DIFERENCIALES

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$\nabla \psi$	$\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{k}$	$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\phi} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\phi}$

$\nabla \cdot A$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\nabla \wedge A$	$\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \hat{i} +$ $+ \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \hat{j} +$ $+ \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \hat{k}$	$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\rho} +$ $+ \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\varphi} +$ $+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{k}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} +$ $+ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} +$ $+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi}$
$\nabla^2 \psi$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$

Calificación del Parcial:

Cada respuesta correcta tendrá un puntaje de +7,5 puntos, y cada respuesta errónea tendrá -1.9 puntos.

Luego de conocidas las soluciones del parcial, se abrirá una lista de las personas que desean se les corrija el parcial en forma manual. Para que ello sea posible, el estudiante deberá haber entregado las hojas con los desarrollos teóricos junto con la hoja de escáner.

En caso que el estudiante solicite la corrección manual no se aplicarán los puntajes mencionados anteriormente.