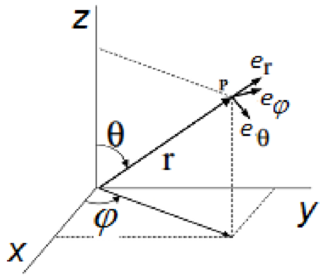
Soluciones – Parcial I 2017

1. Considere una región esférica del espacio, de radio $r = a$,centrada en el origen de coordenadas. Suponga en el interior de dicha regiónhay una cierta distribución de carga libre (en el vacío) tal que el campo eléctrico vale:



$$E(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\left[(1 - cos(\theta))\hat{e}_r + sen(\theta)\hat{e}_\theta\right] \quad \text{(para} r < a\text{)}$$

Siendo (r, θ, φ) coordenadas polares esféricas.

¿Cuál es el módulo del momento dipolar eléctrico (p) de la esfera respecto al origen de coordenadas?

a)	b)	c)	d)	e)
$p = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0}$	$p = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0} cos(\theta)$	$p = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0} sen(\theta)$	$p = 0$	$p = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}$

(Sugerencia: halle la densidad volumétrica de carga en la esfera).

Solución:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0} \to \rho_L = \rho_0 a2/r$$

Es una densidad de carga con simetría esférica por lo tanto el momento dipolar es nulo. O se puede hacer la cuenta:

$$\vec{p} = \int \rho_L \vec{r} dV = \int \frac{\rho_0 a2r\hat{e}_r}{r} r^2 dr sin\theta\, d\theta d\varphi = 0$$

Al escribir $\hat{e}_r$ en función de eje fijos, se ve fácilmente que la integral angular es nula.

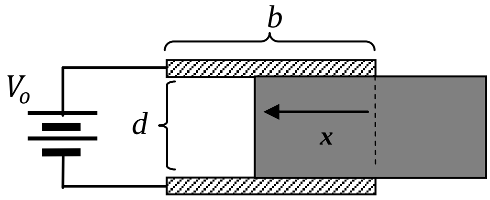
2. En el mismo sistema del problema anterior ¿cuál es el potencial electrostático para $r > a$ (en el vacío)?

a)	b)	c)	d)	e)
$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$	$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^5}{\varepsilon_0}\frac{cos(\theta)}{r^3}$	$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\rho_0 a^5}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}$	$\phi(\vec{r}) = 0$	$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0}\frac{sen(\theta)}{r^2}$

Solución: Como el momento dipolar es nulo, solo queda el orden monopolar:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\int \frac{\rho_0 a2}{r'} dV'}{r} = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

3. Entre las placas de un condensador conseparación d y de lados a y b, existe una diferencia de potencial V_o. Si se empuja mecánicamente el dieléctrico hacia el exterior de las placas con una fuerza F_0, ¿cuál debe ser la permitividad ε del medio dieléctrico lineal para que el dieléctrico esté en equilibrio?



a)	b)	c)	d)	e)
$\varepsilon = \varepsilon_0 + F_0 2d/aV_0^2$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + x/b)$	$\varepsilon = \varepsilon_0 + F_0 2d/bV_0^2$	$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + x/d)$

Solución:

Para que este en equilibrio, la fuerza neta (suma de la fuerza eléctrica que experimenta el dieléctrico y la fuerza mecánica) debe ser nula. Entonces:

$$F_{neta} = F_{ele}\,\hat{\imath} - F_0\hat{\imath} \rightarrow F_0 = F_{ele} = |\nabla U|$$

Se necesita calcular la energía almacenada $U = \int \vec{E}\cdot\vec{D}\, dV$. El campo eléctrico es uniforme en toda la región e igual a $\frac{V_0}{d}$ en módulo, se separa la integral en la región dieléctrico y vacio.

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V_0}{d}\right)^2 da(b-x) + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V_0}{d}\right)^2 da(x)$$

$$\vec{F}_{ele} = \nabla U = \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{d}\right)^2 da(\varepsilon - \varepsilon_0)\hat{\imath}$$

De la igualdad de los módulos de las fuerzas obtenemos una expresión para ε.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{d}\right)^2 da(\varepsilon - \varepsilon_0) = F_0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 + F_0 2d/aV_0^2$$

4. Un cilindro infinito de radio a, de un material óhmico de conductividad g, está sometida a un potencial$V_0 sin(\theta)$ en su superficie. ¿Cuánto vale la potencia disipada por unidad de longitud por efecto Joule dentro del cilindro?

a)	b)	c)	d)	e)
$\pi g V_0^2$	$\frac{gV_0^2 a}{3}$	$\frac{3\pi g V_0^2}{4}$	$\frac{gV_0^2}{2a}$	0

(Sugerencia; halle el potencial dentro del cilindro utilizando como solución tentativa $\phi = \left(\frac{A}{r^n} + Br^n\right)$ (C $\sin(n\theta)$ + D $\cos(n\theta)$) con *n* entero).

Solución:

$$\nabla \cdot J = 0 \; y \; J = gE, \rightarrow \nabla \cdot E = 0 \; y \; vale \; \nabla^2\phi = 0$$

Las soluciones para el potencial en simetría esféricas hasta orden 1 considerando solo en $\sin\theta$ por como es la condición de borde, son:

$$\phi = A ln(r) + \left(\frac{B}{r} + Cr\right)\sin\theta$$

$A = B = 0$ para que no diverja en el origen, y porque no hay tipo línea de carga. Por condiciones en el borde $Ca = V_0$, entonces el potencial es:

$$\phi = V_0\frac{r}{a}\sin\theta \;\rightarrow\; E = -\nabla\phi = -\frac{V_0}{a}sin\theta e_r - \frac{V_0}{a}cos\theta e_\theta = -\frac{V_0}{a}\hat{\jmath}$$

$$J = -g\frac{V_0}{a}\hat{\jmath}$$

$$P = \int E \cdot J \, dV = g\frac{V_0^2}{a^2}L\pi a^2 \rightarrow \frac{P}{L} = \pi g V_0^2$$

5. Considere dos medios conductores, con conductividades g_1 (para $z < 0$) y g_2 (para $z > 0$). Suponga que una corriente pasa a través de la interfase desde el medio 1 al medio 2, y que el vector densidad de corriente ($\vec{J}$) forma un ángulo de 45° con la normal en el medio 1 y 60° con la normal en el medio 2. Si no hay carga libre en la superficie de separación de los dos medios ,¿cuál es la relación entre las conductividades?

a)	b)	c)	d)	e)
$\frac{g_1}{g_2} = 1/2$	$\frac{g_1}{g_2} = 1/\sqrt{3}$	$\frac{g_1}{g_2} = 3/4$	$\frac{g_1}{g_2} = \sqrt{3}$	$\frac{g_1}{g_2} = 2$

Solución

Tomando que los campos tangenciales son iguales en una frontera:

$$E_{1t} = E_{2t} \;\rightarrow J_{1t}/g_1 = J_{2t}/g_2$$

$$g_2 J_1 \sin(45) = g_1 J_2 \sin(60) \rightarrow J_1 = \frac{g_1}{g_2}J_2\sqrt{3/2}$$

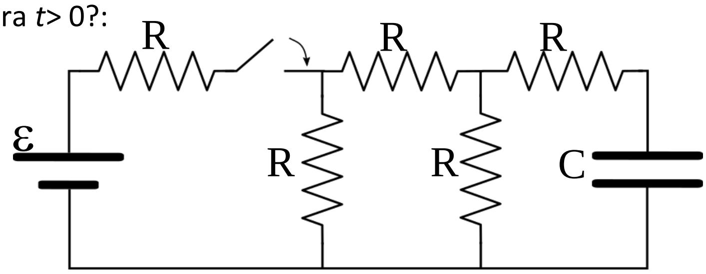
Considerando además una situación estacionaria, la condición de borde para la frontera queda:

$$J_{2n} - J_{1n} = 0 \rightarrow J_2\cos(60) = J_1\cos(45) \rightarrow \frac{J_2}{2} = \frac{J_1}{\sqrt{2}} \rightarrow J_1 = J_2/\sqrt{2}$$

Juntando ambas ecuaciones se obtiene la relación para las conductividades:

$$J_1 = \frac{g_1}{g_2} J_2 \sqrt{3/2} = \frac{J_2}{\sqrt{2}} \to \frac{g_1}{g_2} = 1/\sqrt{3}$$

6. Considere el circuito de la figura, donde todas las resistencias son iguales, de valor R, y el capacitor C se encuentra inicialmente descargado. En t = 0, se cierra la llave. ¿Cuánto vale el voltaje del capacitor para t> 0?:



a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**
$\frac{\varepsilon}{5}\left(1 - e^{-\frac{5t}{8RC}}\right)$	$\frac{\varepsilon}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{3RC}}\right)$	$\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$	$\frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{t}{5RC}}$	$\frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{t}{5RC}} + \frac{\varepsilon}{3}$

Solución:

La forma más astuta es mirar primero el voltaje en régimen, cuando el tiempo es muy grande la caída de potencial en el capacitor es constante, entonces la corriente por el capacitor es cero.

El voltaje en el capacitor es $V_c = \frac{Q}{C} = I_1 R$ mirando la malla de la derecha.

Mirando la malla del medio tenemos que $I_1 2R = I_2 R \to I_2 = 2I_1 \to I = 3I_1$.

Mirando la malla de la fem con 3 resistencias: $\varepsilon - IR - I_1 2R = 0 \to \quad \varepsilon = 5I_1 R$.

Entonces $V_c = \varepsilon/5$. La única opción que cumple esto en $t \to \infty$ es la a).

También se puede resolver todo el sistema y la ecuación diferencial para la carga:

$I_3 = 0$. Ecuación de mallas y nodos:

$$\varepsilon - IR - I_2 R = 0 \ \ (1), \qquad I = I_1 + I_2 \ (4)$$

$$\varepsilon - IR - I_1 R - I_4 R = 0 \ \ (2), \qquad I_1 = I_3 + I_4 (5)$$

$$\varepsilon - IR - I_1 R - I_3 R - \frac{Q_3}{C} = 0 \ \ o \ \ I_4 R - I_3 R - \frac{Q_3}{C} = 0 \ (3),$$

Por ejemplo:

$$1) \ \ \varepsilon - I_1 R - 2I_2 R = 0 \to \ I_2 = -I_1/2 + \varepsilon/2R$$

$$2) \ \varepsilon - 2I_1 R - I_2 R - I_4 R = 0 \to \varepsilon - 2(I_3 + I_4)R - \left(-\frac{I_3 + I_4}{2} + \frac{\varepsilon}{2R}\right) R - I_4 R = 0$$

$$\varepsilon - 3I_3 R - 5I_4 R = 0 \to I_4 = \frac{\varepsilon}{5R} - \frac{3}{5} I_3$$

$$3) \ I_4 R - I_3 R - \frac{Q_3}{C} = 0 \to \frac{\varepsilon}{5} - \frac{3}{5} I_3 R - I_3 R - \frac{Q_3}{C} = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{5}=\frac{dQ_3}{dt}\frac{8}{5}R+\frac{Q_3}{C}\rightarrow\frac{dQ_3}{dt}+\frac{5}{8}\frac{Q_3}{RC}=\frac{\varepsilon}{8R}\quad(4)$$

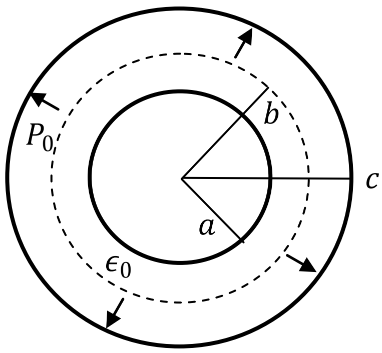
El tipo de solución con carga nula en el instante inicial es:

$$Q_3=Q_0(1-e^{-t/\tau})$$

Sustituyo en (4) para obtener Q_0 y τ:

$$Q_0=\frac{\varepsilon C}{5},\tau=\frac{8RC}{5}\rightarrow V_c=\frac{Q_3}{C}=\frac{\varepsilon}{5}\left(1-e^{-\frac{5t}{8RC}}\right)$$

7. Considere dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a yc. En la región entre los cilindros hay dos capas de material, ambas de conductividad g; La primera capa tiene permitividadϵ_0, radio interno a y externo$b$. La segunda capa tiene polarización P_0radial uniforme (constante), tiene radio interno$b$ y externo$c$. En el instante $t=0$ sólo hay carga libre (Q_0por unidad de longitud) sobre el conductor interno. ¿En qué tiempo la carga libre en la interfase$r=b$ alcanza el valor $P_0\pi b$ por unidad de longitud?



a)	b)	c)	d)	e)
$\epsilon_0 Ln(2)/g$	$g^2 Ln(2)/\epsilon_0$	$\epsilon_0 P_0 g/2$	$2\epsilon_0 P_0 g/5$	$\epsilon_0 P_0/2g$

Solución:

Supongamos que en un instante dado tenemos carga q en el borde de radio a y carga q_L en el borde de radio b, ambas cargas libres.
Entonces, aplicando Gauss:

$$a<r<b\rightarrow\vec{D}=\frac{q}{2\pi Lr}\hat{e}_r\rightarrow\vec{E}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}\hat{e}_r$$

$$b<r<c\rightarrow\vec{D}=\frac{q+q_L}{2\pi Lr}\hat{e}_r\rightarrow\vec{E}=\frac{\vec{D}-\vec{P}}{\varepsilon_0}=\left[\frac{q+q_L}{2\pi\varepsilon_0 Lr}-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\right]\hat{e}_r$$

En la interfase $r=b$:

$$J_{2n}-J_{1n}=g(E_{2n}-E_{1n})-\frac{\partial\sigma_L}{\partial t}\rightarrow g\left[\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0 Lb}-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\right]=-\frac{\dot{q}_L}{2\pi Lb}$$

Entonces obtenemos una ecuación diferencial:

$$\frac{gq_L}{\varepsilon_0}-2\pi Lbg\frac{P_0}{\varepsilon_0}+\dot{q}_L=0$$

La solución que satisface $q_L(0)=0$:

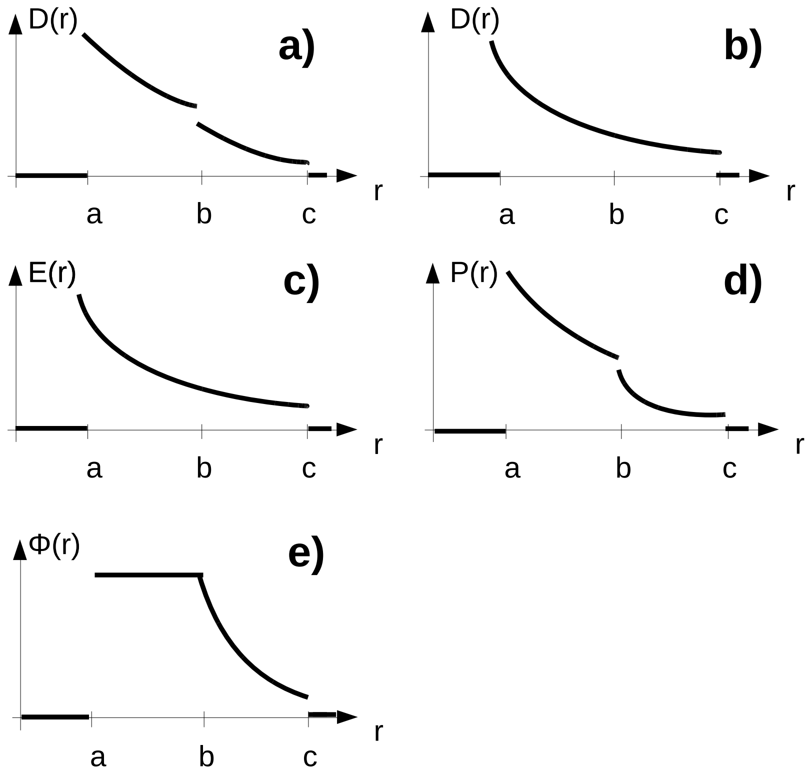
$$q_L(t)=2\pi LbP_0(1-e^{-gt/\varepsilon_0})$$

Colocando la condición:

$$q_L(t_0) = \pi L b P_0 = 2\pi L b P_0 \left(1 - e^{-\frac{g t_0}{\varepsilon_0}}\right) \rightarrow\; e^{-\frac{g t_0}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{2} \rightarrow\; t_0 = \frac{\varepsilon_0}{g}\ln(2)$$

Por otro lado es la única opción con las unidades correctas.

8. Considere el mismo sistema que en el problema anterior. Indique cuál de las siguientes gráficas es correcta en $t = 0$.
Nota: D, E, P, Φ denotan los módulos del desplazamiento, campo, polarización y potencial eléctricos, respectivamente.



Solución:

a) En $t = 0$, no hay carga libre en la interfase asi que el campo $\vec{D}$ es continuo, esta gráfica muestra un campo discontinuo. – Falso.

b) En $t = 0$, no hay carga libre en la interfase asi que el campo $\vec{D}$ es continuo, como muestra esta opción. Ademas es cero dentro ($r < a$) y cero fuera ($r > c$) porque en ambos casos la carga libre neta es cero. Y la caída es tipo $1/r$. - Verdadera.

c) El campo eléctrico no puede ser continuo en la interfase, porque como en la segunda región la polarización es cte, existe una densidad de carga de polarización que genera discontinuidad en el campo eléctrico. – Falso.

d) Es incorrecta porque el primer medio no tiene dieléctrico y la polarización para $a < r < b$ debe ser nula. – Falso.

e) El potencial debe ser continuo y este gráfico no lo verifica – Falso.