Soluciones

Ejercicio 1 –

a) Las ecuaciones de campo son:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = J_T, \qquad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$$

Dentro de la esfera magnetizada, no tenemos corrientes transportadoras

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{\nabla}\times\vec{M} = 0,$$

Como $\vec{M}$ es uniforme, su rotor es nulo y por lo tanto $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$, entonces puedo definir un potencial φ_m tal que $\vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\varphi_m \Rightarrow \nabla^2\varphi_m = 0$.

Fuera de la esfera:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$$

Nuevamente, como el rotor es nulo puedo definir un potencial φ_m, y como su divergencia es nula, dicho potencial cumple Laplace.

$$\vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\varphi_m \Rightarrow \nabla^2\varphi_m = 0$$

b) Condiciones de borde:

En $r\to 0$ el potencial no puede divergir porque no hay corrientes concentradas en el origen que justifiquen tal divergencia

$$\varphi_1(r\to 0)\to cte_1\ (CB1)$$

En $r\to\infty$ todos los campos deben de tender a cero porque no tengo fuentes que se extiendan hasta el infinito:

$$\varphi_2(r\to\infty)\to cte_2\ (CB2)$$

En $r = R$ se deben verificar las ecuaciones de campo, por un lado $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow B_{1r} = B_{2r} \Rightarrow -\mu_0\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_R = -\mu_0\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_R$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_R = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_R \quad (CB3),$$

Por ultimo $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{M} \Rightarrow B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 K_M = \mu_0 M_0 sin\theta =$

$$\left.\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right)\right|_R = M_0 sin\theta \quad (CB4)$$

c) Planteo las soluciones a menos de una constante. Si logro verificar todas las condiciones de borde, por el teorema de unicidad los potenciales φ_1 y φ_2 serán la solución.

$$\varphi_1(r,\theta) = (A_1 r + C_1/r^2)cos\theta + \frac{D_1}{r}$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \left(A_2 r + \frac{C_2}{r^2}\right)cos\theta + \frac{D_2}{r}$$

Los potenciales de los términos D_1 y D_2 corresponderian a la existencia de monopolos, asi que son nulo. Por la condición $(CB1)$, $C_1 = 0$, y por la condición $(CB2)$, $A_2 = 0$.

Ahora imponemos $(CB3)$

$$+A_1 cos\theta = \left(-2\frac{C_2}{R^3}\right)cos\theta$$

$$\Longrightarrow A_1 R^3 = -2C_2 \ \ (2.1)$$

Además por (CB4)

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right) = -\frac{1}{R}(A_1 R)sin\theta + \frac{1}{R}\left(\frac{C_2}{R^2}\right)sin\theta = M_0 sin\theta$$

$$\Longrightarrow A_1 R^3 = C_2 - M_0 R^3 \ (2.2)$$

Restando 2.2-2.1:

$$3C_2 - M_0 R^3 = 0 \Longrightarrow C_2 = \frac{M_0 R^3}{3}$$

$$A_1 = -2C_2/R^3 = -\frac{2M_0}{3}$$

Entonces:

$$\varphi_1(r,\theta) = -\frac{2M_0}{3} r cos\theta \quad (2.3)$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{M_0 R^3}{3r^2} cos\theta \ \ (2.4)$$

d) Calculo el campo magnético tomando el gradiente en 2.3 y 2.4:

$$\vec{B}_1 = -\mu_0 \vec{\nabla}\varphi_1 = -\mu_0\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\hat{e}_\theta\right] = -\mu_0\left[-\frac{2M_0}{3}cos\theta\hat{e}_r + \left(\frac{2M_0}{3}\right)sin\theta\hat{e}_\theta\right]$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0\frac{2M_0}{3}cos\theta\hat{e}_r - \mu_0\frac{2M_0}{3}sin\theta\hat{e}_\theta = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$$

$$\vec{B}_2 = -\mu_0\vec{\nabla}\varphi_2 = -\mu_0\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\hat{e}_\theta\right] =$$

$$= -\mu_0\left[-\left(\frac{2M_0R^3}{3r^3}\right)cos\theta\hat{e}_r - \left(\frac{M_0R^3}{3r^3}\right)sin\theta\hat{e}_\theta\right]$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{3}\mu_0 M_0\frac{R^3}{r^3}\ [2cos\theta\hat{e}_r + sin\theta\hat{e}_\theta]$$

Ejercicio 2 – Circuito magnético.

$$\Phi R_{eq} = NI \Rightarrow\ R_{eq} = \frac{2l}{\mu_1 S} + \frac{2l}{\mu_2 S} = \frac{2l}{S\mu_{ef}}, \qquad Defino\ \frac{1}{\mu_{ef}} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

$$\Phi \frac{2l}{\mu_{ef} S} = NI \Rightarrow\ \Phi = \frac{NI\mu_{ef} S}{2l}$$

a) Para calcular la autoinductancia, tomo el flujo total que pasa por la bobina:

$$\Phi_T = N\Phi = \frac{N^2 I\mu_{ef} S}{2l} \Rightarrow L = \frac{d\Phi_T}{dI} = \frac{N^2\mu_{ef} S}{2l}$$

b) El módulo del campo magnético en todo el circuito magnético es el mismo, y se obtiene del flujo:

$$B = \frac{NI\mu_{ef}}{2l} = \frac{NI}{2l}\frac{\mu_2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

Con respecto a H, vale:

$$H_1 = \frac{NI}{2l}\frac{\mu_{ef}}{\mu_1} = \frac{NI}{2l}\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad , \qquad H_2 = \frac{NI\mu_{ef}}{2l\mu_2} = \frac{NI}{2l}\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

c) Para que el sistema no sature el módulo del campo B debe ser menor al campo de saturación siempre:

$$B = \frac{NI}{2l}\frac{\mu_2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} < B_{sat}$$

Para obtener I, miramos el circuito bobina- fuente:

$$V - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow V_0 - i\omega L\tilde{I}_o = 0 \Rightarrow \tilde{I}_o = \frac{V_0}{i\omega L}$$

Entonces, el máximo valor de intensidad y por ende el máximo valor de campo que existirá en el circuito es: $I_{max} = V_0/\omega L$

$$\frac{NV_0\mu_{ef}}{2l\omega L} < B_{sat} \Rightarrow \omega_{min} = \frac{NV_0\mu_{ef}}{2lB_{sat}L} = \frac{NV_0\mu_{ef}}{2lB_{sat}\frac{N^2\mu_{ef} S}{2l}} = \frac{V_0}{NB_{sat}S}$$

d) La energía acumulada se puede calcular a partir de los campos $\frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}dV$ o como $\frac{1}{2}LI^2$.

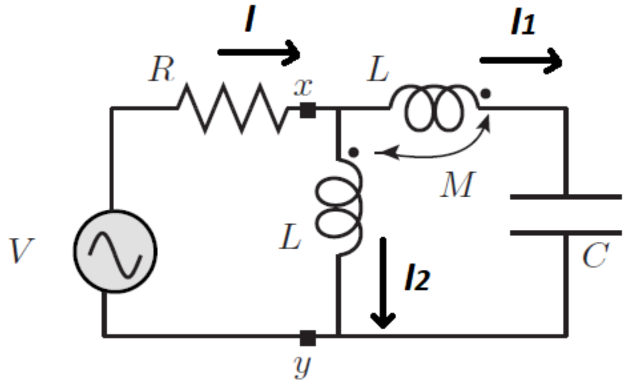
$$U = \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}dV = \frac{1}{2}B^2\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)S2l = \frac{1}{2}\frac{B^2 S2l}{\mu_{ef}} = \frac{1}{2}\left(\frac{NI\mu_{ef}}{2l}\right)^2\frac{2l}{\mu_{ef}}S = \frac{1}{2}\frac{N^2 S\mu_{ef}}{2l}I^2$$

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{N^2\mu_{ef} S}{2l}I^2 = \frac{1}{2}\frac{N^2\mu_{ef} S}{2l}\frac{V_0^2}{(\omega L)^2}\cos^2(\omega t - \pi/2)$$

El promedio temporal de $\cos^2(\omega t - \pi/2)$ es ½. Entonces la energía media almacenada es:

$$\overline{U} = \frac{1}{4}\frac{N^2\mu_{ef} S}{2l}\frac{V_0^2}{(\omega L)^2} = \frac{1}{4}\frac{N^2\mu_{ef} S}{2l}\frac{V_0^2 4l^2}{(\omega)^2 S^2\mu_{ef}^2 N^2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 l}{\mu_{ef} SN^2\omega^2}$$

Ejercicio 3 –



$$V = RI + i\omega LI_1 - i\omega MI_2 + \frac{I_1}{i\omega C} \rightarrow V - RI = V' = i\omega LI_1 - i\omega MI_2 + \frac{I_1}{i\omega C}$$

$$V = RI + i\omega LI_2 - i\omega MI_1 \rightarrow V' = i\omega LI_2 - i\omega MI_1$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$V' = i\omega LI_1 - i\omega M(I - I_1) + \frac{I_1}{i\omega C} = \left[i\omega(L+M) - \frac{i}{\omega C}\right] I_1 - i\omega MI \quad (3.1)$$

$$V' = i\omega LI - i\omega(L+M)I_1 \quad (3.2)$$

Despejamos I_1 de 3.2 y sustituimos en 3.1.

$$\frac{V' - i\omega LI}{-i\omega(l+M)} = I_1 \rightarrow V' = \left[i\omega(L+M) - \frac{i}{\omega C}\right]\frac{V' - i\omega LI}{-i\omega(L+M)} - i\omega MI$$

$$V'\left(1 + \frac{1}{i\omega(L+M)}\left[i\omega(L+M) - \frac{i}{\omega C}\right]\right)$$
$$= \frac{I}{i\omega(L+M)}\left(i\omega L\left[i\omega(L+M) - \frac{i}{\omega C}\right] - i\omega Mi\omega(L+M)\right) I$$

$$V'\left[2i\omega(L+M) - \frac{i}{\omega C}\right] = \left(\frac{L}{C} - \omega^2 L(L+M) + \omega^2 M(L+M)\right) I$$

$$V' = \frac{\left(\frac{L}{C} - \omega^2(L-M)(L+M)\right)}{\left[2i\omega(L+M) - \frac{i}{\omega C}\right]} I \rightarrow Z_{eq} = \frac{-i\left(\frac{L}{C} - \omega^2(L-M)(L+M)\right)}{\left[2\omega(L+M) - \frac{1}{\omega C}\right]}$$

a) Para que la potencia disipada sea nula, la corriente por dicha rama debe ser nula ($I = 0$), y por ende el módulo de la impedancia equivalente total $Z_{eq} + R$ debe divergir, ósea $Z_{eq} \rightarrow \infty$

$$2\omega(L+M) - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2(L+M)C}}$$

b) El voltaje en el condensador es:

$$V_c = -\frac{i}{\omega_0 C} I_1$$

Usando al ecuación de la primera rama tomada y que $I = 0, I_1 = -I_2$

$$V = i\omega L I_1 + i\omega M I_1 + \frac{I_1}{i\omega C} = i\left(\omega(L+M) - \frac{1}{\omega C}\right) I_1 = i\left(\frac{1}{2\omega_0 C} - \frac{1}{\omega_0 C}\right) I_1$$
$$= -\frac{i}{2\omega_0 C} I_1 = \frac{V_c}{2}$$

Entonces $|V_c| = 2|V|$