Soluciones Examen Electromagnetismo

Julio 2019

Ejercicio 1

Contenía un error de letra

Ejercicio 2

a) Por la definición de corriente y campo eléctrico en un conductor tenemos:

$I = \int \vec{J}_0 \cdot n da = J_0 \pi R^2$

$\vec{E} = \vec{J}_0 / g \quad para\ r<R,$

Aplicando Ley de Ampere dentro y fuera del conductor tenemos (se elige el eje $\vec{k}$ según $\vec{J}_0$):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0 \cdot n da \rightarrow H\, 2\pi r = J_0 \pi r^2 \rightarrow \vec{H} = \frac{J_0 r}{2} \hat{e}_\theta r < R$$

$$H\, 2\pi r = J_0 \pi R^2 \rightarrow \vec{H} = \frac{J_0 R^2}{2r} \hat{e}_\theta r > R$$

El campo magnético $\vec{E}$, cumple

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{J_0 r}{2} e_\theta para\ r<R$$

b) Las densidades de energía electromagnética son:

$$u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \mu_0 \frac{J_0^2 r^2}{8} para\, r < R$$

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 J_0^2 / g^2\ para\, r < R$$

Por lo tanto la densidad de energía total electromagnética es:

$$u_{EM} = \mu_0 \frac{J_0^2 r^2}{8} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 J_0^2 / g^2\ para\, r < R$$

c) La Potencia disipada por el Efecto Joule es:

$$P_J = \int \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV = J_0^2 l \pi R^2 / g \rightarrow \frac{P_J}{l} = J_0^2 \pi R^2 / g$$

d) Vector de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{J_0}{g} \hat{k} \times \frac{J_0 r}{2} \hat{e}_\theta = \frac{-J_0^2 r}{2g} \hat{e}_r$$

Potencia entrante:

$$P=\int \vec{S}\cdot -\hat{e}_r\, da=\int \frac{J_0^2 R}{2g} R d\theta dl=\frac{\pi J_0^2 R^2 l}{g} \rightarrow \frac{P}{l}=\frac{J_0^2 \pi R^2}{g}$$

Se verifica el balance energético de la ecuación inferior, ya que la densidad de energía electromagnética es constante en el tiempo, y toda la energía que ingresa por los campos (a través de $\vec{S}$) se disipa por efecto Joule.

$$P=P_J$$

Ejercicio 3

a) Primero se analiza el circuito magnético.

Sobre la malla más larga (se anotan Φ_1 y Φ_2 los flujos por las respectivas bobinas):

$$\Phi_1 \frac{3l}{\mu S}+\Phi_2 \frac{3l}{\mu S}=N_1 I_1+N_2 I_2 (2.1)$$

Sobre la malla izquierda:

$$\Phi_1 \frac{3l}{\mu S}+(\Phi_1-\Phi_2)\frac{l}{\mu S}=N_1 I_1=\Phi_1 \frac{3l}{\mu S}+(\Phi_1-\Phi_2)\frac{l}{\mu S}(2.2)$$

dónde se utilizó que la conservación del flujo magnético.

Si restamos las ecuaciones 2.1 y (2.2)*3

$$\Phi_1=\frac{\mu S}{15l}(4N_1 I_1+N_2 I_2)$$

Despejando de 2.2

$$\Phi_2=\frac{\mu S}{15l}(4N_2 I_2+N_1 I_1)$$

Entonces, las autoinductancias son:

$$L_1=N_1\frac{d\Phi_1}{dI_1}=N_1^2\frac{4\mu S}{15l}$$

$$L_2=N_2\frac{d\Phi_2}{dI_2}=N_2^2\frac{4\mu S}{15l}$$

$$M_{12}=M_{21}=N_1\frac{d\Phi_1}{dI_2}=N_2\frac{d\Phi_2}{dI_1}=N_1 N_2\frac{\mu S}{15l}$$

b) Para que el circuito sea equivalente al de la figura, solo deben ser iguales $L_1=L_2=L$ y eso se cumple si los enrollados tienen igual número de vueltas, es decir $N_1=N_2$, y $N_2^2\frac{4\mu S}{15l}=L$. En este caso $M_{12}=N^2\frac{\mu S}{15l}=\frac{L}{4}$.

c) Para que la potencia disipada por la resistencia sea nula, la corriente que circula por ella también debe serlo. Así que el circuito se simplifica a dos mallas. Más aun, la sección punteada de la figura puede traducirse a un $L_{eq}=2L+2M=5L/2$.

La malla izquierda nos da:

$$j\omega L_{eq} I - j\frac{1}{\omega C} I_1 = 0$$

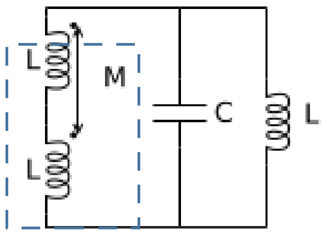
La malla externa nos da:

$$j\omega L_{eq} I + j\omega L I_2 = 0 \rightarrow I_2 = \frac{-L_{eq}}{L} I$$

$$I = I_1 + I_2 = I_1 - \frac{L_{eq}}{L} I \rightarrow I_1 = I\left(1 + L_{eq}/L\right)$$

Entonces

$$j\omega L_{eq} I - j\frac{1}{\omega C} I_1 = 0 = j\omega L_{eq} I - j\frac{1}{\omega CL} I\left(L + L_{eq}\right) \rightarrow \omega L_{eq} = \frac{L+L_{eq}}{\omega CL} \rightarrow C = \frac{L+L_{eq}}{\omega^2 L L_{eq}}$$



$$C = \frac{L+L_{eq}}{\omega^2 L L_{eq}} = \frac{7}{5}\frac{1}{\omega^2 L}$$