Soluciones Primer Parcial Electromagnetismo

28 de setiembre de 2019

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería.

Problema 1 –

a) Adentro del conductor en electrostática, el campo eléctrico es cero, y el potencial constante. Por ende vale el laplaciano igual a cero. Afuera del conductor, el rotor del campo eléctrico es nulo ($\nabla \times \vec{E} = 0$), y como la densidad de carga libre es cero ($\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L = 0$) y el dieléctrico es lineal ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$), la divergencia del campo eléctrico también es nula ($\nabla \cdot \vec{E} = 0$), por lo tanto el potencial verifica Laplace ($\nabla^2\varphi_2 = 0$).

b)

$$\varphi_1(r,\theta) = \varphi_0 \quad r \leq a$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(cos\theta)(A_n r^2 + B_n r^{-(n+1)}) \quad r > a$$

Las condiciones de borde que debe cumplir $\varphi_2(r,\theta)$ son:

$$CB1 \rightarrow \ \varphi_2(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 rcos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} \vartheta\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

El primer término corresponde a la contribución del campo eléctrico uniforme y el segundo a la existencia de carga neta en un dieléctrico lineal (primer término del desarrollo multipolar).

$$CB2 \rightarrow \ \varphi_2(a,\theta) = \varphi_1(a,\theta)$$

$$CB3 \rightarrow D_{2n} = \varepsilon E_{2n} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \sigma_L$$

Usando CB1, $A_1 = -E_0$, $B_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}$, $A_n = 0 \; con \; n \geq 2$

Usando CB2

$$\varphi_2(a,\theta) = -E_0 acos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(cos\theta)(B_n a^{-(n+1)}) = \varphi_0$$

Usando que los polinomios de Legendre $P_n(cos\theta)$ son linealmente independientes, llegamos a $B_1 = E_0 a^3$, $B_n = 0 \; para \; n \geq 2$. De esta forma los potenciales son:

$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + E_0\left(\frac{a^3}{r^2} - r\right)cos\theta$$

$$\varphi_1(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a}$$

c) En $r \leq a \rightarrow \vec{E} = 0, \vec{D} = 0 \; y \, \vec{P} = 0$
En $r > a \rightarrow$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\hat{e}_\theta$$
$$= \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} + E_0 cos\theta\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right)\right]\hat{e}_r + E_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)sin\theta\hat{e}_\theta$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \left[\frac{Q}{4\pi r^2} + \varepsilon E_0 cos\theta\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right)\right]\hat{e}_r + \varepsilon E_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)sin\theta\hat{e}_\theta$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

d) $D_{2n} = \varepsilon E_{2n} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} = \sigma_L = \frac{Q}{4\pi a^2} + 3\varepsilon E_0 cos\theta$

e) $\sigma_p = \vec{P}\cdot -\hat{e}_r = -(\varepsilon - \varepsilon_0)E_{2n} = -\left[\frac{Q(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon a^2} + 3(\varepsilon - \varepsilon_0)E_0 cos\theta\right]$

f) $\vec{p} = \int \sigma_p \vec{r} da = \int -\left[\frac{Q(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon a^2} + 3(\varepsilon - \varepsilon_0)E_0 cos\theta\right] r\hat{e}_r a^2 sin\theta d\varphi d\theta$

$$\vec{p} = -\int\left[\frac{Q(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon a^2} + 3(\varepsilon - \varepsilon_0)E_0 cos\theta\right] a cos\theta a^2 sin\theta d\varphi d\theta\hat{k}$$

$$\vec{p} = -\frac{2\pi 3(\varepsilon - \varepsilon_0)E_0 a^3 2}{3}\hat{k} = -4\pi a^3(\varepsilon - \varepsilon_0)E_0\hat{k}$$

Problema 2 –

a) El sistema se encuentra en estado estacionario, por ende verifica que $\nabla\cdot\vec{J} = 0$, y el problema es análogo a las soluciones electrostáticas, donde existe un potencial lineal en cada región y con ello un campo constante $E_1\hat{\imath}$ y $E_2\hat{\imath}$. Veamos las condiciones de borde:

En $x = L/3$

$$J_{2n} - J_{1n} = 0 \rightarrow g_2E_2 = g_1E_1$$

Además,

$$0 - V_0 = -\int_0^{\frac{L}{3}} E_1 dx - \int_{\frac{L}{3}}^{L} E_2 dx \rightarrow \; V_0 = \frac{E_1 L}{3} + \frac{E_2 2L}{3} = \frac{L}{3}\left(E_1 + \frac{2g_1 E_1}{g_2}\right) \rightarrow$$

$$E_1 = \frac{3V_0}{L(1 + 2g_1/g_2)}, \qquad E_2 = \frac{g_1 3V_0/g_2}{L(1 + 2g_1/g_2)}$$

$$J_1 = J_2 = g_1 E_1 = \frac{3g_1 V_0}{L(1 + 2g_1/g_2)},$$

b) El potencial en $x = L/3$ es

$$V_{L/3} - V_0 = -\int_0^{\frac{L}{3}} E_1 dx = -\frac{V_0 L}{L\left(1 + \frac{2g_1}{g_2}\right)} \rightarrow V_{\frac{L}{3}} = V_0\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2g_1}{g_2}\right)}\right)$$

$$= \frac{2g_1 V_0}{g_2 + 2g_1}$$

c) En la interfase $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_L$

$$\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \sigma_L = \left(\frac{\varepsilon_2}{g_2} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right) J = \frac{3g_1 V_0 \left(\frac{\varepsilon_2}{g_2} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right)}{L(1 + 2g_1/g_2)}$$

La densidad de carga superficial de polarización se calcula como:

$$\sigma_{P_1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{\imath} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{g_1}\right) J$$

$$\sigma_{P_2} = \vec{P}_2 \cdot -\hat{\imath} = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 = -\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{g_1}\right) J$$

$$\sigma_P = \sigma_{P_1} + \sigma_{P_2} = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{g_1} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{g_2}\right) J$$

d) Para que no exista carga libre en la interfase, se debe verificar:

$$\sigma_L = 0 \rightarrow \frac{\varepsilon_2}{g_2} = \frac{\varepsilon_1}{g_1}$$

e) Bajo la condición anterior donde $\sigma_L = 0$ en la interfase, el sistema es equivalente a dos capacitores en serie y a dos resistencias en serie.

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

En un capacitor de área S y distancia entre las placas d, relleno por un medio con permitividad ε, el campo eléctrico es uniforme y su modulo es $E = V_0/d$, y se relaciona con la carga por $\sigma = \frac{\varepsilon V_0}{d} \rightarrow Q = \sigma S = \frac{\varepsilon S V_0}{d} = C_i V_0$.

Entonces

$$C_i = \frac{\varepsilon_i S}{L_i}, \quad con\ L_1 = \frac{L}{3}, y\ L_2 = \frac{2L}{3}$$

$$C_{eq} = \frac{3S}{L}\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

Por otro lado las resistencias en serie se suman como:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

En un medio de espesor d, donde hay un campo uniforme con $J = gE = gV_0/d$, la corriente que atraviesa es $I = JS = \frac{gV_0S}{d} \rightarrow R = d/gS$

Entonces,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = \frac{L}{3g_1S} + \frac{2L}{3g_2S} = \frac{L}{3S}\frac{(g_2 + 2g_1)}{g_1 g_2}$$