Ejercicio 1.

a) Dentro de la cavidad, salvo en $r = 0$, no hay densidad de carga libre de modo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ y como $\vec{E} = -\nabla\phi \implies \nabla^2\phi = 0$

Fuera de la cavidad, tampoco hay densidad de carga libre, entonces tenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \; y \; \nabla^2\phi = 0$$

Que la polarización tiene divergencia nula se ve fácilmente si uno elige el sistema de eje cartesiano $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{\partial P_0}{\partial z} = 0$

b) Denomino solución 1 al medio interior a la cavidad y solución 2 al medio exterior.

$$\nabla^2\phi_1 = 0, \qquad \nabla^2\phi_2 = 0$$

Las condiciones de borde son las siguientes:

$$\phi_1(r \to 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p cos\theta}{r^2} \;\; (CB1),$$

$$\phi_2(r \to \infty) \to \frac{P_0}{\varepsilon_0} r cos\theta \; (CB2)$$

$$\phi_1(r = R) = \phi_2(r = R) \;\; (CB3),$$

$$D_{1n}(r = R) = D_{2n}(r = R) \to \varepsilon_0 E_{1r}(r = R) = \varepsilon_0 E_{2r}(r = R) + P \cdot e_r$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_0 E_{1r}(r = R) = \varepsilon_0 E_{2r}(r = R) + P_0 cos\theta \;\;\; (CB4)$$

Para la $(CB2)$, como $\vec{D}$ tiende a cero en el infinito, el campo eléctrico tiende a $-\frac{P_0}{\varepsilon_0}\hat{k}$, y por ello la expresión para el potencial.

Como todas las condiciones de borde dependen de $cos\theta$, vamos a tomar el desarrollo en polinomios de Legendre hasta $n = 1$, y verificaremos que se pueden imponer todas las condiciones de borde, por lo que, utilizaremos el teorema de unicidad.

$$\phi_1(r, \theta) = (A_1 r + B_1/r^2) cos\theta + \frac{C_1}{r}$$

$$\phi_2(r, \theta) = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2}\right) cos\theta + \frac{C_2}{r}$$

Como no hay carga puntual en el origen, tanto C_1 como C_2 son nulos. Por la condición $(CB1)$, $\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} = B_1$, y por la condición $(CB2)$, $A_2 = P_0/\varepsilon_0$.

Ahora imponemos $(CB3)$ y $(CB4)$:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p cos\theta}{R^2} + A_1 R cos\theta = \frac{P_0}{\varepsilon_0} R cos\theta + \frac{B_2}{R^2} cos\theta \Longrightarrow \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{P_0 R^3}{\varepsilon_0} = B_2 - A_1 R^3$$

Además,

$$\varepsilon_0 E_{1r}(r=R) = -\varepsilon_0\left(-2\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{cos\theta}{R^3} + A_1 cos\theta\right)$$

$$\varepsilon_0 E_{2r}(r=R) + P_0 cos\theta \;\; = -\varepsilon_0\left(\frac{P_0}{\varepsilon_0}cos\theta - \frac{2B_2}{R^3}cos\theta\right) + P_0 cos\theta$$

$$\Longrightarrow \varepsilon_0\left(-2\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{cos\theta}{R^3} + A_1 cos\theta\right) = \varepsilon_0\left(\frac{P_0}{\varepsilon_0}cos\theta - \frac{2B_2}{R^3}cos\theta\right) - P_0 cos\theta$$

$$\Longrightarrow \left(-2\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3} + A_1\right) = \left(\frac{P_0}{\varepsilon_0} - \frac{2B_2}{R^3}\right) - P_0/\varepsilon_0$$

Se tiene entonces,

$$\left(-\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0} + A_1 R^3\right) = -2B_2 \quad (5)$$

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{P_0 R^3}{\varepsilon_0} = B_2 - A_1 R^3 \;\; (6)$$

Si restamos (6)-(5) sacamos B_2, con lo que luego despejamos A_1.

$$B_2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0}, \;\; A_1 = \frac{2P_0}{3\varepsilon_0}$$

Entonces, los potenciales son:

$$\phi_1(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pcos\theta}{r^2} + \frac{2P_0}{3\varepsilon_0}rcos\theta$$

$$\phi_2(r,\theta) = \;\frac{P_0}{\varepsilon_0}rcos\theta + \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0}\right)\frac{cos\theta}{r^2}$$

c) $\sigma_p(r=R) = \vec{P}\cdot\hat{n} = -P_0 cos\theta \;\; pues\; \hat{n} = -\hat{e}_r, \rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$

d) $\vec{p} = \int \sigma_p \vec{r} dS = -\int P_0 cos\theta \vec{r} R^2 sin\theta\, d\theta d\varphi$

$$\vec{r} = Rcos\theta\hat{k} + Rsin\theta cos\varphi\hat{\imath} + Rsin\theta sin\varphi\hat{\jmath}$$

Cuando integremos las componentes en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ según el ángulo azimutal, se anulan porque se integran en un período completo. Sólo sobrevive la componente en $\hat{k}$:

$$\vec{p} = \int \sigma_p \vec{r} dS = -2\pi \int P_0 sin\theta R^3 \cos^2\theta\, d\theta\hat{k} = -\frac{4\pi P_0 R^3}{3}\hat{k}$$

$$\int sin\theta \cos^2\theta\, d\theta = -\int_1^{-1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

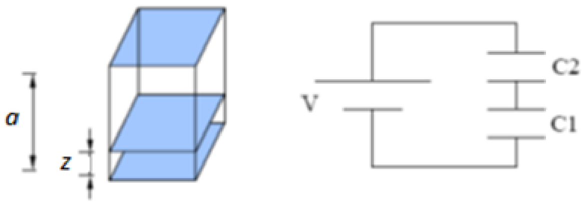
e) Porque hay carga de polarización en el infinito.

Ejercicio 2.

Existen dos regímenes para modelar este ejercicio. Ambos regímenes serán considerados correctos.

Régimen 1. $\boldsymbol{t \ll \varepsilon/g}$ **– Dieléctrico ideal.**

a) Si el prisma está parcialmente lleno se puede considerar como dos capacitares en serie



La capacidad equivalente:

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{z}, C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{a-z} \Longrightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{\varepsilon(a-z) + \varepsilon_0 z} = \frac{\varepsilon_0 k S}{ka - z(k-1)}, \qquad si\ \varepsilon = k\varepsilon_0$$

b) Calculamos la energía del sistema como la energía almacenada en un capacitor, y con ella la fuerza que actúa sobre la cara inferior

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{\varepsilon_0 k S V^2/2}{ka - z(k-1)} \Longrightarrow \vec{F} = \frac{dU}{da}(-\hat{k}) = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2} \frac{k^2}{[ka - z(k-1)]^2} \hat{k}$$

En este caso el dieléctrico está en posición fija (z fijo), y es una variación infinitesimal en la posición de la placa (según a), lo que me permite obtener la fuerza a partir de la energía.

c) La fuerza sobre el dieléctrico es:

$$\vec{F} = \frac{dU}{dz}\hat{k} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2} \frac{(k-1)}{[ka - z(k-1)]^2} \hat{k}$$

Esta fuerza debe ser igual a su peso para mantener un equilibrio:

$$F = Szg\rho_m \Longrightarrow \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2} \frac{k(k-1)}{[ka - z(k-1)]^2} = Szg\rho_m$$

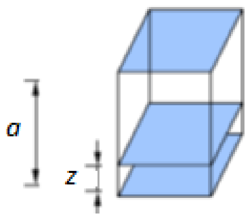
Consideremos ahora el prisma lleno hasta la mitad, es decir que $z = a/2$

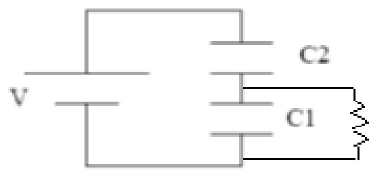
$$\frac{\varepsilon_0 S V^{*2}}{2} \frac{k(k-1)}{[ka - a(k-1)/2]^2} = \frac{\varepsilon_0 S V^{*2}}{2} \frac{k(k-1)4}{a^2(k+1)^2} = \frac{Sag\rho_m}{2} \Longrightarrow V^{*2} = \frac{a^3 g \rho_m (k+1)^2}{4\varepsilon_0 k(k-1)}$$

Entonces el potencial es: $V^* = \sqrt{\frac{a^3 g \rho_m (k+1)^2}{4\varepsilon_0 k(k-1)}}$

Régimen 2. $\boldsymbol{t \gg \varepsilon/g}$

a) En este caso, no hay campo eléctrico en el capacitor 1, y la carga se encuentra entre la placa metálica superior y la cara superior del dieléctrico. El circuito equivalente es el que se muestra en la figura, la capacidad equivalente corresponde al capacitor de C_2.





La capacidad equivalente:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{a - z}$$

b) Calculamos la energía del sistema como la energía almacenada en un capacitor:

$$U = \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{a - z} V^2$$

La fuerza sobre la placa inferior es nula porque no hay campo eléctrico fuera del capacitor C_2,

$$\vec{F} = \vec{0}$$

c) La fuerza sobre el dieléctrico es:

$$\vec{F} = \frac{dU}{dz} \hat{k} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S V^2}{(a - z)^2} \hat{k}$$

Esta fuerza debe ser igual al peso para mantener un equilibrio:

$$F = Szg\rho_m \Longrightarrow \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S V^2}{(a - z)^2} = Szg\rho_m$$

Consideremos ahora el prisma lleno hasta la mitad, es decir que $z = a/2$

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S V^{*2}}{(a - z)^2} = \frac{2\varepsilon_0 S V^{*2}}{a^2} = \frac{S a g \rho_m}{2} \Longrightarrow V^{*2} = \frac{a^3 g \rho_m}{4\varepsilon_0}$$

Entonces el potencial es: $V^* = \sqrt{\frac{a^3 g \rho_m}{4\varepsilon_0}}$

d) Para determinar cómo varía la carga en las placas, tomamos un pequeño volumen en forma de píldora sobre una de las placas y planteamos la conservación de la carga:

$$\frac{dq}{dt} = -I = -S\vec{J} \cdot \hat{n}$$

Además,

$$\frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}$$

Entonces

$$\vec{J} \cdot \hat{n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (7)$$

Además, tenemos la condición de borde que relaciona el desplazamiento dieléctrico con la densidad de carga libre:

$$\vec{D} \cdot \hat{n} = \sigma \quad (8)$$

Por ultimo tenemos las ecuaciones que relacionan los campos $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ y $\vec{J} = g\vec{E}$.

Calculemos la variación de la carga en la placa superior, en ese caso la normal es $-\hat{k}$ y los campos también están en esta dirección. Entonces, combinando (7) y (8):

$$J = gE = \frac{gD}{\varepsilon} = \frac{g\sigma}{\varepsilon} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{g}{\varepsilon}\sigma = 0 \Longrightarrow \sigma = \sigma(0)e^{-tg/\varepsilon}$$

La condición inicial $\sigma(0) = D = \varepsilon V_0/a$, se obtiene del estado estacionario antes de desconectar la batería con el dieléctrico llenando todo el espacio.

$$\sigma(z = a, t) = \frac{\varepsilon V_0}{a} e^{-tg/\varepsilon}$$

En la placa inferior se obtiene la misma dependencia: $\sigma(z = 0, t) = -\frac{\varepsilon V_0}{a} e^{-tg/\varepsilon}$.