Primer Parcial Electromagnetismo (1128) - 8/10/2021.-

(1) a) $\nabla\times\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\nabla\phi$

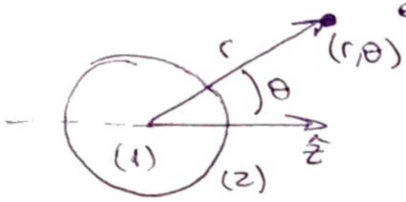
$\nabla\cdot\vec{D}=0$ ← región sin cargas libres $\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi=0}$ Ec. de Laplace

$\left(\begin{array}{l}\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \text{ (dieléctrico)} \\ \vec{D}=\underset{\text{cte}}{\overset{\text{cte}}{\varepsilon_0}}\vec{E} \text{ (cavidad)}\end{array}\right)$

(se verifica en cada región, tanto dentro de la cavidad como en el dieléctrico)

b) $\phi(r,\theta,\cancel{\varphi})=\phi(r,\theta)$ ← coordenadas esféricas

← la configuración tiene simetría en torno al eje z ⇒ independiente de φ



- región 1 (cavidad)

$$\phi_1(r,\theta)=\left(A_1+\frac{B_1}{r}\right)+\left(C_1 r+\frac{D_1}{r^2}\right)\cos\theta \quad ; \; r\leq a$$

- región 2 (dieléctrico)

$$\phi_2(r,\theta)=\left(A_2+\frac{B_2}{r}\right)+\left(C_2 r+\frac{D_2}{r^2}\right)\cos\theta \quad ; \; r\geq a$$

- Condiciones de frontera:

i) $\underset{r\to\infty}{\phi_2} \approx -E_0 \underset{r\cos\theta}{\overset{\shortparallel}{z}} + \text{cte} \Rightarrow \boxed{C_2=-E_0}$

ii) $\underset{r\to 0}{\phi_1}$ acotado (no diverge) $\Rightarrow \boxed{B_1=0}$ y $\boxed{D_1=0}$

iii) $\phi_1\big|_{r=a}=\phi_2\big|_{r=a}$

iv) $\underbrace{\vec{D_2}}_{\varepsilon\vec{E_2}}\cdot\hat{e}_r\Big|_{r=a}-\underbrace{\vec{D_1}}_{\varepsilon_0\vec{E_1}}\cdot\hat{e}_r\Big|_{r=a}=\overset{=0}{\sigma_L\big|_{r=a}}$ ← no hay carga libre

De (iii):

$$A_1+C_1 a\cos\theta=A_2+\frac{B_2}{a}+\left(-E_0 a+\frac{D_2}{a^2}\right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow A_1=A_2+\frac{B_2}{a} \; (*) \quad y \quad C_1 a=-E_0 a+\frac{D_2}{a^2} \; (\#)$$

De (iV): $\varepsilon \underbrace{\vec{E}_2}_{-\nabla\phi_2} \cdot \hat{e}_r \Big|_{r=a} = \varepsilon_0 \underbrace{\vec{E}_1}_{-\nabla\phi_1} \cdot \hat{e}_r \Big|_{r=a} \Rightarrow \varepsilon \dfrac{\partial \phi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}\Big|_{r=a}$

$$\Rightarrow \varepsilon\left[\frac{B_2}{a^2} - \left(E_0 + 2\frac{D_2}{a^3}\right)\cos\theta\right] = \varepsilon_0 (C_1 \cos\theta)$$

$\Rightarrow \boxed{B_2 = 0}$ — (en (*)) $\rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$ $\rightarrow$ los potenciales quedan definidos a menos de una constante indeterminada, que se puede elegir como cero y no va a afectar al campo eléctrico.

$$\varepsilon_0 C_1 = -\varepsilon E_0 - 2\varepsilon \frac{D_2}{a^3} \quad (\#_2)$$

Reescribiendo las ecuaciones (#) y ($\#_2$):

$$C_1 a^3 = -E_0 a^3 + D_2$$

$$-C_1 a^3 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} E_0 a^3 + 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} D_2 \quad \downarrow \text{sumo}$$

$$0 = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) E_0 a^3 + D_2\left(2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 1\right) \Rightarrow \boxed{D_2 = -\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0}\right) E_0 a^3}$$

Luego $C_1 = -E_0 + \dfrac{D_2}{a^3} = -E_0 - \left(\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0}\right) E_0 = -E_0\left(\dfrac{2\varepsilon + \cancel{\varepsilon_0} + \varepsilon - \cancel{\varepsilon_0}}{2\varepsilon + \varepsilon_0}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = -\left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0}\right) E_0}$$

Entonces, $\boxed{\phi_1(r,\theta) = -\left(\dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0}\right) E_0 r \cos\theta}$; $r \leq a$

y $\boxed{\phi_2(r,\theta) = \left[-E_0 r - E_0 \dfrac{a^3}{r^2}\left(\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0}\right)\right]\cos\theta}$; $r \geq a$

Como cada potencial verifica la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera $\Rightarrow$ es la solución buscada.

c) $\vec{E}_1 = -\nabla\phi_1 = -\left[\dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}\hat{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \theta}\hat{e}_\theta\right]$

$$= -\left\{-\left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\right) E_0 \cos\theta\, \hat{e}_r + \frac{1}{\cancel{r}}\left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\right) E_0 \cancel{r} \,\mathrm{sen}\,\theta\, \hat{e}_\theta\right\}$$

$$= \left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\right) E_0 \underbrace{(\cos\theta\, \hat{e}_r - \mathrm{sen}\,\theta\, \hat{e}_\theta)}_{\hat{z}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\right) E_0 \hat{z}}$$

$$\sigma_P\Big|_{r=a} = \vec{P}\cdot\underbrace{\hat{n}}_{=-\hat{e}_r}\Big|_{r=a}$$ ← normal saliente al dieléctrico

$$\underbrace{\vec{D}_2}_{=\varepsilon\vec{E}_2} = \varepsilon_0\vec{E}_2 + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\underbrace{\vec{E}_2}_{=-\nabla\phi_2} = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\phi_2$$

Entonces, $\sigma_P\Big|_{r=a} = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\phi_2\cdot(-\hat{e}_r)\Big|_{r=a} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\underbrace{\nabla\phi_2\cdot\hat{e}_r\Big|_{r=a}}_{=\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\big|_{r=a}}$

$$\Rightarrow \sigma_P\Big|_{r=a} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\underbrace{\left[-E_0 + 2E_0\frac{\cancel{a^3}}{\cancel{a^3}}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\right)\right]}_{=-E_0\frac{(\cancel{2\varepsilon}+\varepsilon_0-\cancel{2\varepsilon}+2\varepsilon)}{2\varepsilon+\varepsilon_0}}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_P(a,\theta) = -3\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\right)E_0\cos\theta}$$

---

(2) a) coordenadas cilíndricas:

$\phi(\rho,\cancel{\varphi},\cancel{z}) = \phi(\rho)$

↑ desprecio condiciones de borde

la configuración tiene simetría de revolución en torno al eje z

En la región donde está el material, $\nabla^2\phi = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right] = 0 \rightarrow \rho\frac{d\phi}{d\rho} = A = \text{cte.} \Rightarrow \phi(\rho) = A\ln\rho + B_{\text{cte.}}$$

$$\underbrace{\phi(\rho=a)}_{A\ln a+B} - \underbrace{\phi(\rho=b)}_{=A\ln b+B} = V_0 \Rightarrow A\ln(a/b) = V_0 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}}$$

la cte. B queda sin determinar, puedo elegirla como cero y no afecta al campo.

$$\vec{E}(\rho) = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{d\rho}\hat{e}_\rho = -\frac{A}{\rho}\hat{e}_\rho \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\rho) = \frac{V_0}{\ln(b/a)}\left(\frac{1}{\rho}\right)\hat{e}_\rho}$$

$$\boxed{\vec{J} = g\vec{E} = \frac{gV_0}{\ln(b/a)}\left(\frac{1}{\rho}\right)\hat{e}_\rho}$$

b) § energía almacenada:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{\varepsilon}{2}\int_V E^2\,dv = \frac{\varepsilon V_0^2 (2\pi L)}{2\ln^2(b/a)} \underbrace{\int_a^b \frac{1}{\rho^{\cancel{2}}}\rho\,d\rho}_{\ln(b/a)}$$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $dv = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}\right)V_0^2}$$

también $U = \frac{1}{2}CV_0^2$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}$$

§ Potencia disipada:

$$\boxed{P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv = g\int_V E^2\,dv = g\frac{V_0^2\,2\pi L}{\ln(b/a)}}$$

$\vec{J} = g\vec{E}$

también $P = V_0^2/R$ $\Rightarrow R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi g L}$

$$\Rightarrow \boxed{RC = \frac{\cancel{\ln(b/a)}}{\cancel{2\pi} g \cancel{L}}\,\frac{\cancel{2\pi}\varepsilon \cancel{L}}{\cancel{\ln(b/a)}} = \varepsilon/g}$$

c)

$$\hat{n}\cdot\vec{D}\Big|_{\rho=a} = \sigma_L(\rho=a)$$

$\hat{n} = \hat{e}_\rho$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_L(a) = \vec{D}\cdot\hat{e}_\rho\Big|_{\rho=a} = \varepsilon\frac{V_0}{a}\frac{1}{\ln(b/a)}}$$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$\hat{n}\cdot\vec{D}\Big|_{\rho=b} = \sigma_L(\rho=b)$$

$\hat{n} = -\hat{e}_\rho$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_L(b) = -\varepsilon\frac{V_0}{b}\frac{1}{\ln(b/a)}}$$

—x—