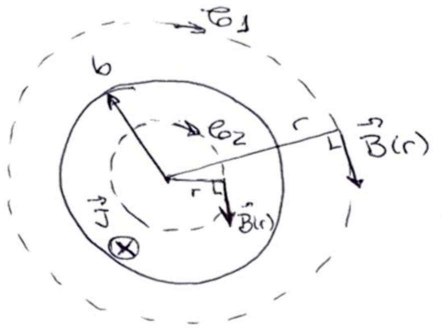
Segundo Parcial Electromagnetismo (1128) - 3/12/21.-

(1) a)



$\S$ $r>b$

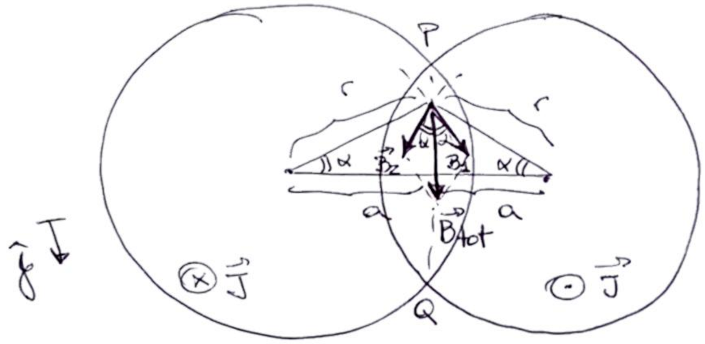
$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{=\,B(2\pi r)} = \mu_0 I_{\mathcal{C}} = \mu_0 J \pi b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J b^2}{2r}\,\hat{e}_\varphi \qquad r>b}$$

; $\hat{e}_\varphi$ versor tangente a la cfa de radio r, en sentido horario.

$\S$ $r<b$ $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\mathcal{C}_2} = \mu_0 J\pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J r}{2}\,\hat{e}_\varphi \;;\; r<b}$

b) La situación a resolver es equivalente a considerar la superposición de dos conductores como el de la parte (a), uno con $\vec{J}\otimes$ y el otro con $\vec{J}\odot$.



Dada la simetría, las componentes horizontales de los campos se anulan entre sí (en cualquier punto del segmento PQ) y las verticales (que resultan iguales) se suman.

$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ ← contribución campo debido al conductor completo de la derecha con $\vec{J}\odot$

↑ campo total en un punto arbitrario del segmento PQ

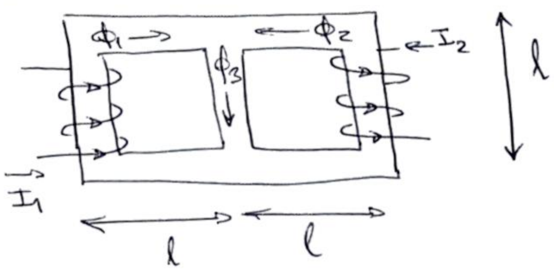
$\vec{B}_1$ ← campo debido al conductor completo de la izquierda con $\vec{J}\otimes$

$$B_{tot} = 2|B_1|\underbrace{\cos\alpha}_{=\,\frac{a}{r}} = \frac{\cancel{2}\mu_0 J \cancel{r} a}{\cancel{2}\cancel{r}} = \mu_0 J a \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{tot} = \mu_0 J a\,\hat{j}}$$

$\hat{j}$ versor (↓)

— $\propto$ —

②



a) material lineal : $H = \frac{B}{\mu} = \frac{\phi}{\mu S}$

reluctancias: sea $\mathcal{R}_0 = \frac{l}{\mu S}$

$\Rightarrow \mathcal{R}_{01} = \mathcal{R}_{02} = 3\mathcal{R}_0$; $\mathcal{R}_{03} = \mathcal{R}_0$

rama izq. ; rama dcha. ; rama central

$$\begin{cases} N_1 I_1 = \phi_1 (3\mathcal{R}_0) + \phi_3 \mathcal{R}_{03} \quad (1) & \leftarrow \text{Ampère malla izq. sntdo. horario} \\ N_2 I_2 = \phi_2 (3\mathcal{R}_0) + \phi_3 \mathcal{R}_{03} \quad (2) & \leftarrow \text{" \quad " \quad dcha " antih.} \\ \phi_3 = \phi_1 + \phi_2 \quad (3) & \leftarrow \text{nodos} \end{cases}$$

sustituyendo (3) en (1) y (2):

$N_1 I_1 = \phi_1 (4\mathcal{R}_0) + \phi_2 \mathcal{R}_0 \Rightarrow \phi_2 = \frac{N_1 I_1 - 4\mathcal{R}_0 \phi_1}{\mathcal{R}_0}$ (*)

$N_2 I_2 = \phi_2 (4\mathcal{R}_0) + \phi_1 \mathcal{R}_0 \longrightarrow N_2 I_2 = 4 N_1 I_1 - 15 \phi_1 \mathcal{R}_0$

$\Rightarrow \boxed{\phi_1 = \frac{4 N_1 I_1 - N_2 I_2}{15 \mathcal{R}_0}}$

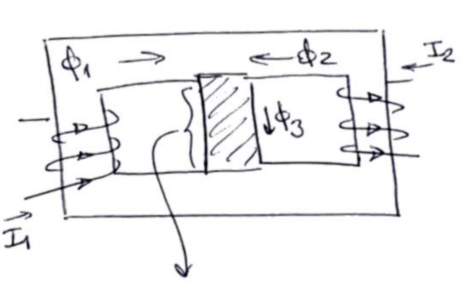
Sust. en (*):

$\boxed{\phi_2 = \frac{-N_1 I_1 + 4 N_2 I_2}{15 \mathcal{R}_0}}$

Entonces, $\boxed{L_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dI_1} = \frac{4 N_1^2}{15} \left(\frac{\mu S}{l} \right)}$; $\boxed{L_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dI_2} = \frac{4 N_2^2}{15} \left(\frac{\mu S}{l} \right)}$

$\boxed{M = N_1 \frac{d\phi_1}{dI_2} = -\frac{N_1 N_2}{15} \left(\frac{\mu S}{l} \right)}$ (idem a partir de $M = N_2 \frac{d\phi_2}{dI_1}$)

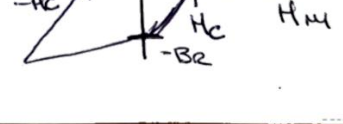
b)



Como $\phi_3 = 0$ (rama central, donde está el imán permanente)

$\Rightarrow B_{m} = 0 \Rightarrow$ de la curva de histéresis, hay sólo dos posibles valores para H_m : $\boxed{H_m = (\pm) H_c}$ (#)

curva de histéresis:
(rama central)



mallas y nodos:

$$\begin{cases} N_1 I_1 = \phi_1 \mathcal{R}_0 + H_m l & (1)\\ N_2 I_2 = \phi_2 \mathcal{R}_0 + H_m l & (2)\\ \phi_1 + \phi_2 = \underbrace{\phi_3 = 0}_{\text{impongo}} & (3) \end{cases}$$

sea $\mathcal{R}_0 = 3l/\mu S$

$\underbrace{\mathcal{R}_{01}}_{\text{rama izq.}} = \underbrace{\mathcal{R}_{02}}_{\text{rama dcha.}} = \mathcal{R}_0$

el material por la rama central es no lineal (curva de histéresis)

Usando (1), (2), (3):

De (#): $H_m = (\pm) H_c$

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 2 H_m l = (\pm) 2 H_c l$$

$$\Rightarrow \boxed{N_2 I_2 = - N_1 I_1 (\pm) 2 H_c l}$$

Obs: el signo de arriba corresponde a $\vec{H}_m$ hacia abajo en el imán y el signo de abajo corresponde a $\vec{H}_m$ hacia arriba.

Luego, $\vec{H}_m = \overbrace{\frac{\vec{B}_m}{\mu_0}}^{\nearrow 0} - \vec{M}$

$$\Rightarrow \vec{M} = -\vec{H}_m \Rightarrow \boxed{M = (\mp) H_c} \quad \begin{cases} M = -H_c & (\vec{M} \text{ hacia arriba}) \\ M = +H_c & (\vec{M} \text{ hacia abajo}) \end{cases}$$

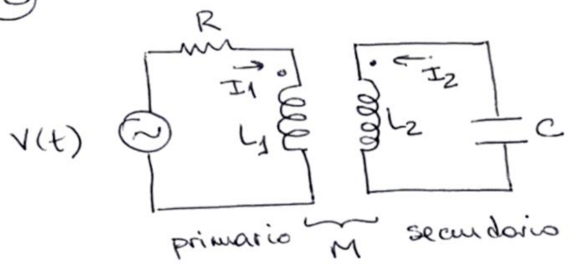
Los dos posibles valores se deben a las dos posiciones posibles del imán permanente en el circuito, de acuerdo a la orientación de sus polos 

ó 

.

— x —

(3)



$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$

$\tilde{V} = V_0 e^{j\omega t}$

$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_{10} e^{j\omega t}$

$\tilde{I}_2 = \tilde{I}_{20} e^{j\omega t}$

a) $V_0 - R\tilde{I}_{10} - j\omega L_1 \tilde{I}_{10} - j\omega M \tilde{I}_{20} = 0 \quad (1)$

$-\frac{1}{j\omega C}\tilde{I}_{20} - j\omega L_2 \tilde{I}_{20} - j\omega M \tilde{I}_{10} = 0 \quad (2)$

De (2): $\tilde{I}_{20}\left[\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2\right] = -j\omega M \tilde{I}_{10}$

$\Rightarrow \tilde{I}_{20} = \left(\frac{-M\omega^2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}\right)\tilde{I}_{10}$

Sust. en (1):

$$V_0 = \left[R + j\omega L_1 - \frac{j\omega^3 M^2 C}{(\omega^2 L_2 C - 1)}\right]\tilde{I}_{10} = \left\{R + j\left[\omega L_1 - \frac{\omega^3 M^2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}\right]\right\}\tilde{I}_{10}$$

$$\Rightarrow \tilde{I}_{10} = \frac{V_0}{R + j\left[\omega L_1 - \frac{\omega^3 M^2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}\right]} = \frac{V_0}{\tilde{Z}} = \frac{V_0}{|\tilde{Z}|e^{j\varphi}} = \underbrace{\frac{V_0}{|\tilde{Z}|}}_{|\tilde{I}_{10}|} e^{-j\varphi} = |\tilde{I}_{10}| e^{-j\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\tilde{I}_{10}| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{\omega^3 M^2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}\right)^2}}} \; ; \; \boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L_1 - \frac{\omega^3 M^2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}}{R}\right)}$$

$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_{10} e^{j\omega t} = |\tilde{I}_{10}| e^{-j\varphi} e^{j\omega t} = |\tilde{I}_{10}| e^{j(\omega t - \varphi)}$

$\Rightarrow i_1(t) = |\tilde{I}_{10}| \cos(\omega t - \varphi)$

b) $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\tilde{V}\tilde{I}_{10}^*\right\}$

$M^2 = L_1 L_2$

$$\tilde{I}_{10} = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega^3 M^2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}\right)} = \frac{V_0}{R + j\underbrace{\left(\omega L_1 - \frac{\omega^3 L_1 L_2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}\right)}}$$

$$\frac{\cancel{\omega^3 L_1 L_2 C} - \omega L_1 - \cancel{\omega^3 L_1 L_2 C}}{\omega^2 L_2 C - 1} = \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_2 C}$$

$$\tilde{I}_{10} = \frac{V_0}{R + j\left(\frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_2 C}\right)} \Rightarrow \tilde{I}_{10}^{*} = \frac{V_0}{R - j\left(\frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_2 C}\right)}$$

$$\Rightarrow V_0 \tilde{I}_{10}^{*} = \frac{V_0^2}{R - j\left(\frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_2 C}\right)} = \frac{V_0^2}{a - jb} = \frac{V_0^2 (a+jb)}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \frac{V_0 (a+jb)}{a^2+b^2} \right\} = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{R}{R^2 + \frac{\omega^2 L_1^2}{(1-\omega^2 L_2 C)^2}}}$$

— x —