Soluciones Segundo Parcial Electromagnetismo

1ro de Diciembre de 2023

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería.

Problema 1 –

En estado estacionario se verifica la ecuación de Laplace en el espacio entre las placas. De modo que podemos tomar la solución de Laplace para el potencial en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2\phi = 0 \;\rightarrow\; \phi(r) = -A ln(r) + B$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi \rightarrow \vec{E} = \frac{A}{r}\hat{e}_r$$

La contante A se obtiene integrando el campo entre las placas.

$$-V_0 = \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{A}{r}dr = -A ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow A = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r,\;\; \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \;\;\; y\; \vec{J} = g\vec{E}$$

b) Calculemos la densidad de carga libre en cada placa

$$\sigma_L(r=a) = \vec{D}\cdot\hat{e}_r = \varepsilon\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a} \qquad \sigma_L(r=b) = \vec{D}\cdot -\hat{e}_r = -\varepsilon\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{b}$$

c) La corriente la calculamos integrando $\vec{J}$ en un área cilíndrica entre ambas placas

$$I = \iint \vec{J}\cdot\hat{n}da = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{L} \frac{gV_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}rd\theta dz = 2\pi L\frac{gV_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La resistencia puede obtenerse a partir de $V_0 = RI$, de la expresión hallada en c):

$$R = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi Lg}$$

La potencia disipada puede calcularse como el producto del voltaje y la corriente a través de la resistencia:

$$P = V_0 I = \frac{V_0^2}{R} = \frac{2\pi LgV_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Alternativamente, puede calcularse también a partir de:

$$P = \int \vec{J}\cdot\vec{E}dV = g\int E^2\, dV = g\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2 \int \frac{1}{r^2}rdr2\pi L = \frac{2\pi LgV_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{V_0^2}{R}$$

d) Al desconectar la fuente, el sistema ya no está en estado estacionario, y el capacitor comienza a descargarse a través de la resistencia. De la ecuación de continuidad tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{g\rho_L}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = 0 \rightarrow \rho_L(r,t) = \rho_L(r,0)e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$$

Como $\rho_L(r,0) = 0$, sigue sin haber carga libre en el espacio entre las placas ya que $\rho_L(r,t) = 0$ para todo t posterior. Para ver cómo evoluciona la carga en las placas evaluamos las condiciones de borde en ellas:

$$\sigma_L(r=a,t) = D_n(r=a), y\ \dot{\sigma}_L(r=a,t) = -J_n(r=a)$$

Entonces

$$\frac{\partial \sigma_L}{\partial t} + \frac{g}{\varepsilon}\sigma_L = 0$$

$$\sigma_L(r=a,t) = \sigma_L(r=a,0)e^{-\frac{g}{\varepsilon}t} = \varepsilon \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a}e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$$

Con esta densidad de carga podemos aplicar la Ley de Gauss para hallar el Campo eléctrico

$$E(r,t)(2\pi r L) = \sigma_L(r=a,t)\left(\frac{2\pi a L}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a}e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}\left(\frac{2\pi a L}{\varepsilon}\right) \rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}\hat{e}_r = \vec{E}(r,0)e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$$

$$V(t) = \phi(a) - \phi(b) = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = V_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$$

La energía total disipada va a ser la energía almacenada en el capacitor en t=0:

$$U_{tot} = U_C(t=0) = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}\frac{2\pi L\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}V_0^2 = \frac{\pi L\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}V_0^2$$

Alternativamente, puede hallarse a partir de la potencia disipada:

$$P = \int \vec{J}\cdot\vec{E}dV = g\int E(r,0)^2 e^{-2\frac{g}{\varepsilon}t}dV = g\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2 e^{-2\frac{g}{\varepsilon}t}\int\frac{1}{r^2}rdr2\pi L = \frac{2\pi L g V_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$= \frac{V_0^2}{R}e^{-2\frac{g}{\varepsilon}t}$$

Luego, la energía total se halla integrando la potencia disipada entre 0 e infinito:

$$U = \int_0^\infty Pdt = \frac{V_0^2}{R}\frac{\varepsilon}{2g} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

Recordando que $RC = \frac{\varepsilon}{g}$, la energía disipada coincide con la energía almacenada en el capacitor en t=0.

Problema 2

a) Para hallar las constantes usaremos que el cilindro interno y externo llevan la misma corriente, pero en sentidos opuestos:

$$I_0 = \iint \vec{J_1} \cdot \hat{k} da = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \gamma r^2 dr d\theta = \frac{\gamma 2\pi a^3}{3} \rightarrow \gamma = \frac{3I_0}{2\pi a^3}$$

$$I_0 = \iint \vec{J_2} \cdot (-\hat{k}) da = \int_0^{2\pi}\int_b^{c} \beta r dr d\theta = \frac{2\pi\beta(c^2 - b^2)}{2} \rightarrow \beta = \frac{I_0}{\pi(c^2 - b^2)}$$

b) Para calcular $\vec{B}$ y $\vec{M}$ comenzaremos calculando $\vec{H}$ con la ley de Ampere. Por la simetría, con corrientes según $\hat{k}$, y medios lineales, todos los campos resultan según $\hat{e}_\theta$ (regla de la mano derecha), pasaremos a escribir solo los módulos.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot \hat{n} da$$

Región ($\boldsymbol{r < a}$),

$$H(r)2\pi r = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \gamma r^2 dr d\theta = \frac{\gamma 2\pi r^3}{3} \rightarrow H(r) = \frac{\gamma r^2}{3} = \frac{I_0 r^2}{2\pi a^3}, \qquad B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I_0 r^2}{2\pi a^3} \quad (1)$$

Región ($\boldsymbol{a < r < b}$),

$$H(r)2\pi r = I_0 \rightarrow H(r) = \frac{I_0}{2\pi r}, \quad B = \mu H = \mu \frac{I_0}{2\pi r}, \qquad M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) H = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I_0}{2\pi r} \quad (2)$$

Región ($\boldsymbol{b < r < c}$),

$$H(r)2\pi r = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \gamma r^2 dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_b^{r} \beta r dr d\theta = I_0 - \beta\pi(r^2 - b^2) = I_0 + \beta\pi b^2 - \beta\pi r^2$$
$$= \beta\pi(c^2 - r^2)$$

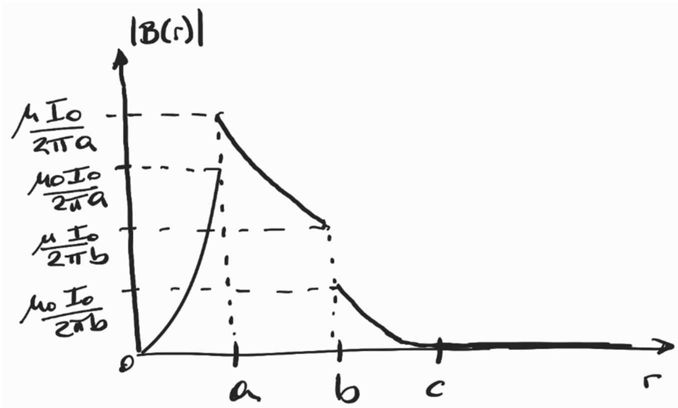
$$H = \frac{\beta(c^2 - r^2)}{2r} = \frac{I_0}{2\pi r}\frac{(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)}, \quad B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi r}\frac{(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)} \quad (3)$$

Región ($\boldsymbol{c < r}$),

$$H(r)2\pi r = I_0 - I_0 = 0 \rightarrow H = 0, \qquad B = \mu_0 H = 0. \quad (4)$$

No hay magnetización (M=0) fuera de la región $a < r < b$.

c) Bosquejo B vs r:



d) Calculemos el flujo

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} da = l \int B\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta h dr = h \int B dr$$

$$\phi = \frac{h I_0 \mu_0}{2\pi}\left[\int_0^a \frac{r^2}{a^3} dr + \frac{\mu}{\mu_0}\int_a^b \frac{1}{r} dr + \int_b^c \frac{1}{r}\frac{(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)} dr\right]$$

$$\phi = \frac{h I_0}{2\pi}\mu_0\left[\frac{1}{3} + \frac{\mu}{\mu_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right)\frac{c^2}{(c^2 - b^2)} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\phi = \frac{h\mu_0}{2\pi}\left[\frac{\mu}{\mu_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right)\frac{c^2}{(c^2 - b^2)} - \frac{1}{6}\right] I_0$$

La autoinductancia por unidad de longitud resulta:

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{\mu}{\mu_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{c^2}{(c^2 - b^2)}\ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{6}\right]$$

Problema 3

El circuito de la figura es alimentado por una fuente de voltaje $v(t) = V_0 cos\omega t = Re(V) = Re(V_0 e^{j\omega t})$. Vamos a calcular la impedancia equivalente del circuito.

Primero sumamos las impedancias en serie en la rama de L y C:

$$Z_1 = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\frac{(\omega^2 LC - 1)}{\omega C}$$

Luego, sumamos Z_1 con $R_2 = R$ (impedancias en paralelo):

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R} - j\frac{\omega C}{(\omega^2 LC - 1)} = \frac{(\omega^2 LC - 1) - j\omega CR}{(\omega^2 LC - 1)R} \rightarrow$$

$$Z_2 = \frac{(\omega^2 LC - 1)R}{(\omega^2 LC - 1) - j\omega CR} = \frac{(\omega^2 LC - 1)R[(\omega^2 LC - 1) + j\omega CR]}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}$$

Finalmente sumamos en serie Z_2 con $R_1 = R$:

$$Z_{eq} = R + Z_2 = R + \frac{(\omega^2 LC - 1)R[(\omega^2 LC - 1) + j\omega CR]}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}$$

$$Z_{eq} = Z_{real} + jZ_{imag} = \left(R + \frac{R\,(\omega^2 LC - 1)^2}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}\right) + j\left(\frac{\omega C R^2(\omega^2 LC - 1)}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}\right)$$

$$Z_{eq} = \frac{R(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^3 + (\omega^2 LC - 1)R[(\omega^2 LC - 1) + j\omega CR]}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}$$

$$Z_{eq} = \frac{2R(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^3 + j\omega C(\omega^2 LC - 1)R^2}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}$$

Ahora calculemos la fase de Z_{eq}:

$$\theta = artg\left(\frac{Z_{imag}}{Z_{real}}\right) = artg\left(\frac{\omega RC(\omega^2 LC - 1)}{2(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2}\right)$$

y su módulo:

$$|Z_{eq}| = \sqrt{Z_{imag}^2 + Z_{real}^2}$$

$$= \sqrt{\left(R + \frac{R\,(\omega^2 LC - 1)^2}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}\right)^2 + \left(\frac{\omega C R^2(\omega^2 LC - 1)}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}\right)^2}$$

$$|Z_{eq}| = R\frac{\sqrt{(2(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2)^2 + \omega^2 C^2 R^2(\omega^2 LC - 1)^2}}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}$$

$$|Z_{eq}| = R\frac{\sqrt{4(\omega^2 LC - 1)^4 + \omega^4 C^4 R^4 + 5\omega^2 C^2 R^2(\omega^2 LC - 1)^2}}{[(\omega^2 LC - 1)^2 + \omega^2 C^2 R^2]}$$

b) La corriente resulta $i(t) = Re(I)$, donde

$$I(t) = \frac{V(t)}{Z_{eq}} = \frac{V(t)}{|Z_{eq}|e^{j\theta}} = \frac{V(t)}{|Z_{eq}|}e^{-j\theta} = \frac{V_0}{|Z_{eq}|}e^{j\omega t}e^{-j\theta} = \frac{V_0}{|Z_{eq}|}e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$i(t) = Re(I) = \frac{V_0}{|Z_{eq}|}\cos(\omega t - \theta)$$

$$i(t) = \frac{V_0[(\omega^2LC - 1)^2 + \omega^2C^2R^2]\cos(\omega t - \theta)}{R\sqrt{4(\omega^2LC - 1)^4 + \omega^4C^4R^4 + 5\omega^2C^2R^2(\omega^2LC - 1)^2}}$$

c) Para que la corriente i(t) y el voltaje v(t) por la fuente estén en fase, $\theta = 0$, es decir su tangente debe ser nula y por ende la parte imaginaria de Z.

$$\omega RC(\omega^2LC - 1) = 0 \rightarrow \omega^2LC - 1 = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En este caso tenemos una resonancia y el circuito se reduce a dos resistencias en serie.

d) En las condiciones de (c), la potencia instantánea entregada por la fuente es

$$P(t) = i(t)v(t) = \frac{V_0^2}{R}\cos^2(\omega_0 t)$$

El promedio del coseno en un periodo de tiempo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ resulta ½.

Entonces la potencia media entregada por la fuente es:

$$P_m = \frac{V_0^2}{2R}$$

Alternativamente, la potencia media también puede calcularse como:

$$P_m = \frac{1}{2}Re\{VI^*\} = \frac{1}{2}Re\{V_0^2I^*\} = \frac{1}{2}Re\left\{V_0^2\frac{e^{j\theta}}{|Z_{eq}(\omega_0)|}\right\} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}\cos(\theta(\omega_0) = 0) = \frac{V_0^2}{2R}$$