Soluciones Examen Electromagnetismo

8 de febrero de 2024

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería.

Problema 1 –

a) El problema es electrostático de modo que el rotacional del campo eléctrico es cero.

Para $0 < r < a$ no hay medios dieléctricos ni carga libre, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Existe un potencial ϕ_1, tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_1$, ϕ_1 verifica la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi_1 = 0$.

Fuera de la cavidad, el medio es lineal y tampoco hay carga libre

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Existe un potencial ϕ_2, tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_2$, ϕ_2 verifica la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi_2 = 0$.

b) condiciones de frontera:

a. El potencial $\phi_1(r,\theta)$ diverge en el origen como un dipolo puntual

$$\phi_1(r \to 0, \theta) \to \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0 cos\theta}{r^2}$$

b. El potencial $\phi_2(r \to \infty, \theta)$ debe corresponderse con el campo eléctrico uniforme en el infinito

$$\phi_2(r \to \infty, \theta) = -E_0 z = -E_0 r cos\theta$$

c. En *r=a* (frontera entre los medios) el potencial debe ser continuo $\phi_2(a,\theta) = \phi_1(a,\theta)$.

d. En *r=a* el desplazamiento dieléctrico normal es continuo porque no hay carga libre sobre la zona interfacial.

En $r = a$

$$D_{2r} = D_{1r} \Rightarrow \varepsilon \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right|_a = \varepsilon_0 \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right|_a$$

Esta condición se deduce de aplicar gauss sobre la frontera, es una pastilla cilíndrica por ejemplo cuyo alto tienda a cero.

c) El problema tiene simetría esférica y azimutal, por lo cual la solución general a la ecuación de la Laplace puede ser escrita con la siguiente expresión

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(cos\theta)(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})$$

Como las condiciones de borde solo involucran términos hasta P_1, cortaremos el desarrollo en $n = 1$, y evaluaremos si se cumplen las condiciones de frontera. De cumplirse, aplicando el teorema de unicidad de la solución de la ecuación de Laplace, podemos asegurar que ese es el potencial del problema a menos de una constante aditiva.

Proponemos las siguientes expresiones para los potenciales en los medios 1 ($r < a$) y 2 ($r > a$).

$$\phi_1(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right) cos\theta \quad r < a$$

$$\phi_2(r,\theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2}\right) cos\theta \quad r > a$$

Aplicando la condición de borde (a). se observa que

$$B_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p_0, B_0 = 0$$

Aplicando la condición de borde (d).

$$C_1 = -E_0$$

Aplicando continuidad (c)

$$A_0 + \left(A_1 a + \frac{B_1}{a^2}\right) cos\theta = C_0 + \frac{D_0}{a} + \left(C_1 a + \frac{D_1}{a^2}\right) cos\theta$$

$$A_0 = C_0 + \frac{D_0}{a}$$

$$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = C_1 a + \frac{D_1}{a^2}$$

Aplicando (d)

$$\varepsilon\left(C_1 - \frac{2D_1}{a^3}\right) cos\theta - \frac{\varepsilon D_0}{a^2} = \varepsilon_0\left(A_1 - \frac{2B_1}{a^3}\right) cos\theta$$

Utilizando que los polinomios de Legendre $P_0 = 1$ y $P_1 = \cos\theta$ son ortogonales:

$$C_1 - \frac{2D_1}{a^3} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\left(A_1 - \frac{2B_1}{a^3}\right), \qquad D_0 = 0, A_0 = C_0$$

$$\phi_1(r,\theta) = A_0 + \left(A_1 r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0}{r^2}\right) cos\theta \quad r < a$$

$$\phi_2(r,\theta) = A_0 + \left(-E_0 r + \frac{D_1}{r^2}\right) cos\theta \quad r > a$$

Tenemos que operar con:

$$C_1 - \frac{2D_1}{a^3} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\left(A_1 - \frac{2B_1}{a^3}\right) \ (1)$$

$$C_1 + \frac{D_1}{a^3} = A_1 + \frac{B_1}{a^3} \ (2)$$

Combinando las ecuaciones anteriores como 2*(2) +(1)

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon E_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)} - \frac{p_0}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)}$$

Y haciendo $(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})$*(1) –(2)

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1\right)C_1 - \left(1+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\frac{D_1}{a^3} = -3\frac{B_1}{a^3}$$

$$D_1 = \frac{\left[3B_1 + \left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)C_1 a^3\right]}{\left(1+\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}$$

$$D_1 = \frac{3p_0}{4\pi(2\varepsilon+\varepsilon_0)} - \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0 a^3}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)}$$

Reuniendo todo en los potenciales tenemos

$$\phi_1(r,\theta) = A_0 + \left[-\left(\frac{3\varepsilon E_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)} + \frac{p_0}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)}\right)r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0}{r^2}\right]cos\theta \quad r<a$$

$$\phi_2(r,\theta) = A_0 + \left[-E_0 r + \left(-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0 a^3}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)} + \frac{3p_0}{4\pi(2\varepsilon+\varepsilon_0)}\right)\frac{1}{r^2}\right]cos\theta \quad r>a$$

Observemos que, si el medio dieléctrico fuera el vacío igual que en la cavidad, tendríamos un único medio con $\varepsilon = \varepsilon_0$ y resultaría $\phi_1(r,\theta) = \phi_2(r,\theta)$ y correspondiente al potencial de un dipolo puntual en el origen más un campo externo uniforme

$$\phi_1(r,\theta) = \phi_2(r,\theta) = A_0 + \left(-E_0 r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0}{r^2}\right)cos\theta$$

d) Para calcular la densidad superficial de carga de polarización en r=a, debemos considerar la polarización en el medio dieléctrico:

$$\vec{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}_2 = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\phi_2$$

$$\sigma_{pa} = \vec{P}\cdot(-\hat{e}_r)\Big|_{r=a} = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\phi_2\cdot(-\hat{e}_r)\Big|_{r=a} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\Big|_{r=a}$$

$$\sigma_{pa} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\left(-E_0 + \left(\frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)} - \frac{3p_0}{2\pi a^3(2\varepsilon+\varepsilon_0)}\right)\right)cos\theta$$

$$\sigma_{pa}(\theta) = \frac{-3\varepsilon_0}{(2\varepsilon+\varepsilon_0)}(\varepsilon-\varepsilon_0)\left(E_0 + \frac{p_0}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\right)cos\theta$$

Observemos que, como es de esperar, si fuera $\varepsilon = \varepsilon_0, \sigma_{pa} = 0$

Problema 2.

a)

Como estamos en estado estacionario, de la ecuación de continuidad, en cada una de las regiones, 1 (*a*<*r*<*b*) y 2 (*b*<*r*<*c*), tenemos (en coordenadas cilíndricas, donde r es la distancia al eje z):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_1 = 0 \rightarrow g_1\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1 = 0 \rightarrow \vec{E}_1(r) = \frac{A}{r}\hat{e}_r$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_2 = 0 \rightarrow g_2\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2 = 0 \rightarrow \vec{E}_2(r) = \frac{B}{r}\hat{e}_r$$

con A y B constantes a determinar.

Evaluando la diferencia de potencial entre los conductores en *r=a* y *r=c*:

$$V_0 = \phi(a) - \phi(c) = -\int_c^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^c \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}_1\cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}_2\cdot d\vec{r} =$$
$$= A ln\left(\frac{b}{a}\right) + B ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

Aplicando la condición de borde en la interfase entre los medios óhmicos (*r=b*). Como el sistema está en régimen estacionario, $\dot{\sigma}_L(r=b) = 0$, las componentes normales de las densidades de corriente volumétrica resultan iguales en *r=b*:

$$J_{2r} = J_{1r} \rightarrow g_1 E_{1r} = g_2 E_{2r} \rightarrow g_1 A = g_2 B$$

$$A ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{g_1}{g_2} A ln\left(\frac{c}{b}\right) = V_0$$

$$A = \frac{V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{g_1}{g_2} ln\left(\frac{c}{b}\right)}, B = \frac{V_0}{\frac{g_2}{g_1} ln\left(\frac{b}{a}\right) + ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{g_1}{g_2} ln\left(\frac{c}{b}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r \quad \vec{E}_2 = \frac{V_0}{\frac{g_2}{g_1} ln\left(\frac{b}{a}\right) + ln\left(\frac{c}{b}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r$$

Existe una sola densidad de corriente ($J_2 = J_1$) $\rightarrow \vec{J} = \frac{g_1 g_2 V_0}{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r$

Para calcular la corriente, I, calculamos el flujo de $\vec{J}$ a través de la cara lateral de una superficie cilíndrica de radio r fijo, arbitrario (*a*<*r*<*c*):

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = \iint_{0\,0}^{2\pi\,L} \frac{g_1 g_2 V_0}{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)}\frac{1}{r} r d\theta dz = 2\pi L \frac{g_1 g_2 V_0}{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

Donde $d\vec{a} = \hat{e}_r(r d\theta dz)$.

b) La resistencia se deduce de la ecuación anterior ya que $V_0 = RI$:

$$R = \frac{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi L g_1 g_2}$$

El resultado esta en acuerdo con dos resistencias (cilíndricas) en serie:

$$R_1 = \frac{ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi L g_1} \quad R_2 = \frac{ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi L g_2}$$

La potencia se obtiene a partir de $P = V_0 I = RI^2$ o bien a partir de $P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$.

$$P = 2\pi L \frac{g_1 g_2 V_0^2}{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

c) Calculemos las densidades de carga libre

$$\sigma_L(r=a) = \overrightarrow{D_1} \cdot (\hat{e}_r) = D_{1n} = \varepsilon_0 \frac{V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{g_1}{g_2} ln\left(\frac{c}{b}\right)} \frac{1}{a}$$

$$\sigma_L(r=c) = \overrightarrow{D_2} \cdot (-\hat{e}_r) = -D_{2n} = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{\frac{g_2}{g_1} ln\left(\frac{b}{a}\right) + ln\left(\frac{c}{b}\right)} \frac{1}{c}$$

$$\sigma_L(r=b) = \left(\overrightarrow{D_2} - \overrightarrow{D_1}\right) \cdot (\hat{e}_r) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b}\left[\frac{1}{\frac{g_2}{g_1} ln\left(\frac{b}{a}\right) + ln\left(\frac{c}{b}\right)} - \frac{1}{ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{g_1}{g_2} ln\left(\frac{c}{b}\right)}\right] = \frac{\varepsilon_0 V_0 (g_1 - g_2)}{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)} \frac{1}{b}$$

Observación: fuera $g_1 = g_2$, resulta $\sigma_L(r=b) = 0$, como es de esperar.

d) Al desconectar la fuente el sistema ya no está en estado estacionario, de las condiciones de borde para J y D:

$$\sigma_L(r=a,t) = D_{1n}(r=a,t), y\ \dot{\sigma}_L(r=a,t) = -J_{1n}(r=a,t)$$

Entonces

$$\frac{\partial \sigma_L(r=a,t)}{\partial t} = -J_{1n}(r=a,t) = -g_1 E_{1n}(r=a,t) = -\frac{g_1}{\varepsilon_0} D_{1n}(r=a,t)$$

$$= -\frac{g_1}{\varepsilon_0} \sigma_L(r=a,t) \ \rightarrow$$

$$\frac{g_1}{\varepsilon_0} \sigma_L(r=a,t) + \frac{\partial \sigma_L(r=a,t)}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\sigma_L(r=a,t) = \sigma_L(r=a,0) e^{-\frac{g_1}{\varepsilon_0} t} = \frac{\varepsilon_0 V_0 g_2}{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)} \frac{1}{a} e^{-\frac{g_1}{\varepsilon_0} t}$$

Análogamente para *r* = *c*:

$$\sigma_L(r=c,t) = \sigma_L(r=c,0) e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0} t} = -\frac{\varepsilon_0 V_0 g_1}{g_2 ln\left(\frac{b}{a}\right) + g_1 ln\left(\frac{c}{b}\right)} \frac{1}{c} e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0} t}$$

Ejercicio 3.

a) Aplicando la ley de Ampere en forma integral, considerando una curva cerrada (C) en forma de rectángulo paralelo al eje z, con un lado dentro del solenoide y otro fuera y dado que el campo magnético es cero fuera del solenoide resulta:

$$\int_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o I_C \rightarrow \vec{B}(t) = \mu_o n i(t)\hat{z} = \mu_o n i_o sen(\omega t)\hat{z}$$

El campo magnético dentro de la bobina es uniforme espacialmente y es según $\hat{z}$

b) Para deducir el campo eléctrico inducido aplicamos la ley de Faraday, considerando como curva una circunferencia (C) de radio *r* (perpendicular al eje z y centrada en él) y la recorremos en sentido horario. $\hat{e}_\theta$ sentido horario con el pulgar según $\hat{z}$. Por simetría, el campo eléctrico es $\vec{E}(r,t)\hat{e}_\theta$ y $\vec{B}(t) = \mu_o n i\hat{z} = \mu_o\mu_o n i_o sen(\omega t)\hat{z}$ (hallado en la parte anterior)

$$r < b \qquad \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{dB}{dt}(\pi r^2) \rightarrow E(2\pi r) = -(\pi r^2)\mu_o n i_o \omega cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \vec{E}(r,t) = -\frac{\mu_o \omega r}{2} n i_o cos(\omega t)\hat{e}_\theta$$

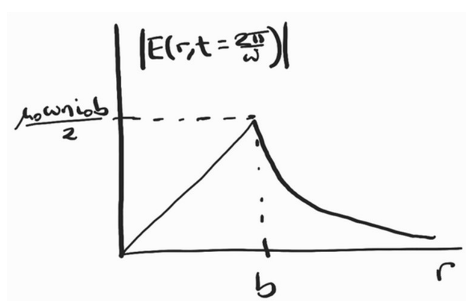
$$r > b \qquad \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{dB}{dt}\left(\pi b^2\right) \rightarrow E(2\pi r) = -\left(\pi b^2\right)\mu_o n i_o \omega cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \vec{E}(r,t) = -\frac{\mu_o \omega b^2}{2r} n i_o cos(\omega t)\hat{e}_\theta$$

c) Para $t = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow cos(\omega t) = 1$.

$\left|\vec{E}\left(r, t = \frac{2\pi}{\omega}\right)\right| = \left(\frac{\mu_o \omega n i_o}{2}\right) r$, *r<b* y $\left|\vec{E}\left(r, t = \frac{2\pi}{\omega}\right)\right| = \left(\frac{\mu_o \omega b^2 n i_o}{2}\right)\frac{1}{r}$, *r>b*

Entonces, el bosquejo del módulo de los campos resulta:



d) Podemos calcular la inductancia mutua a partir del flujo del campo magnético a través de la espira:

$$\phi_B = \mu_o n i \pi a^2 \rightarrow M = \frac{d\phi_B}{di} = \frac{\phi_B}{i} = \mu_o n \pi a^2$$