Solución Examen Electromagnetismo

2 de Agosto del 2024

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería.

Problema 1 –

a) Medio 1 $(0 < z < a)$

Las placas central e inferior tienen una diferencia de potencial Vo y el campo entre ellas es uniforme: $V(z=0) - V(z=a) = E_1 a \rightarrow \vec{E}_1 = -\frac{V_0}{a}\hat{z}$

En ese medio, calculamos $\vec{D}_1$: $\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P} = \left(\frac{-\varepsilon_0 V_0}{a} + P_0\right)\hat{z}$

Por ser aislante perfecto, g_1=0, y resultan la densidad de corriente y la corriente nulas:

$$\vec{J}_1 = g_1 \vec{E}_1 = 0\ ,\ \ I_1 = \int_A \vec{J}_1 . d\vec{A} = 0$$

Medio 2 $(a < z < a + b)$

Analogamente, las placas central y superior tienen una diferencia de potencial Vo, de modo que el campo eléctrico entre ellas resulta:

$$V(z=a) - V(z=a+b) = E_2 b \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{V_0}{b}\hat{z}$$

En este caso, el medio es lineal entonces: $\vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2 = \frac{\varepsilon V_0}{b}\hat{z}$

Podemos calcular $\vec{J}_2 = g\vec{E}_2 = \frac{gV_0}{b}\hat{z}$, y la corriente, como el flujo de la densidad de corriente a través de la superficie de área A: $I_2 = \int_A \vec{J}_2 . d\vec{A} = J_2 A = \frac{gV_0}{b} A$

b) En la placa inferior $(z = 0)$: $\sigma_{z=0} = \vec{D}_1 \cdot \hat{z} = \left(\frac{-\varepsilon_0 V_0}{a} + P_0\right)$

En la placa superior $(z = a + b)$: $\sigma_{z=a+b} = \vec{D}_2 \cdot (-\hat{z}) = -\varepsilon \frac{V_0}{b}$

En la placa central $(z = a)$, imponemos que la densidad de carga sea nula y despejamos el valor de V_0 para que ello ocurra:

$$\sigma_{z=a} = \vec{D}_2 \cdot \hat{z} - \vec{D}_1 \cdot \hat{z} = \varepsilon \frac{V_0}{b} - \left(\frac{-\varepsilon_0 V_0}{a} + P_0\right) = 0 \quad \rightarrow \quad V_0 = \frac{P_0}{\frac{\varepsilon}{b} + \frac{\varepsilon_0}{a}} = \frac{abP_0}{\varepsilon a + \varepsilon_0 b}$$

c) densidades de carga de polarización:

medio 1: $\vec{P} = \vec{P}_0$

$$\sigma_P|_{z=0} = \vec{P}_0 \cdot -\hat{z} = -P_0 \qquad \sigma_P|_{z=a} = \vec{P}_0 \cdot \hat{z} = P_0 \qquad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}_0 = 0$$

medio 2: $\vec{P}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{V_0}{b}\hat{z}$

$\sigma_P|_{z=a} \ = \vec{P}_2 \cdot -\hat{z} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{V_0}{b}\hat{z} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)a}{\varepsilon a+ \ {}_0 b}P_0\hat{z}$

$\sigma_P|_{z=a+b} = \vec{P}_2 \cdot \hat{z} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{V_0}{b}\hat{z} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)a}{\varepsilon a+\varepsilon_0 b}P_0\hat{z}$ $\qquad\qquad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}_2 = 0$

d) Cuando se desconecta la fuente, el sistema evoluciona hasta un nuevo estado estacionario (*). En ese estado final estacionario, ya no habrá corriente en el medio óhmico, por lo que la corriente y la densidad de corriente, el campo eléctrico y el desplazamiento en el medio 2 resultan:

$$I_{2f} = 0 \to J_{2f} = \frac{I_{2f}}{A} = 0 \ \to E_{2f} = \frac{J_{2f}}{g} = 0 \to D_{2f} = \varepsilon E_{2f} = 0$$

Las placas superior e inferior permanecen conectadas a tierra: $V_f(z=0) = V_f(z = a + b) = 0$. De la diferencia de potencial entre las placas central y superior, conociendo el campo podemos hallar que el potencial final de la placa central también será cero:

$$V_f(z=a) - V_f(z=a+b) = E_{2f}b = 0 \ \to V_f(z=a) = 0$$

Entonces,

$$V_f(z=0) - V_f(z=a) = -E_{1f}a \ \to E_{1f} = 0$$

$$\vec{D}_{1f} = \varepsilon_0\vec{E}_{1f} + \vec{P} = P_0\hat{z}$$

$$\sigma_{z=0} = \vec{D}_{1f} \cdot \hat{z} = P_0 \to Q_{z=0} = P_0A$$

$$\sigma_{z=a} = \vec{D}_{1f} \cdot (-\hat{z}) = -P_0 \to Q_{z=a} = -P_0A$$

$$\sigma_{z=a+b} = \vec{D}_{2f} \cdot \hat{z} = 0 \to Q_{z=a+b} = 0$$

(*) Entre los dos estados estacionarios, inicial y final, existe un transitorio en que el potencial de la placa central decae exponencialmente en el tiempo desde su valor V_0 hasta 0. En cada instante la carga libre de la placa central es:

$Q_{z=a}(t) = A\left(\frac{\varepsilon a+\varepsilon_0 b}{ab}\right)V(t) - P_0A \to I_2(t) = -\frac{dQ_{z=a}(t)}{dt} = -A\left(\frac{\varepsilon a+\varepsilon_0 b}{ab}\right)\frac{dV(t)}{dt}$,

además: $\quad I_2(t) = J_2(t)A = \frac{gV(t)}{b}A$

$\to V(t) = V_0\exp(-t/\tau) \qquad$ con $\tau = \frac{\varepsilon a+\varepsilon_0 b}{ga}$

Al final, todos los campos se anulan excepto D_1 debido a la polarización P_0.

Problema 2 –

Las ecuaciones que cumplen los campos son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad\qquad \nabla \times \vec{H} = J_T,$$

Tanto dentro como fuera de la esfera no existen corrientes de transporte, entonces:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_1 = 0 \qquad \nabla\times\vec{H}_1 = 0 \ \Rightarrow \exists\ \varphi_1^* : \vec{H}_1 = -\nabla\varphi_1^*$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_2 = 0 \qquad \nabla\times\vec{H}_2 = 0 \Rightarrow \exists\ \varphi_2^* :\ \vec{H}_2 = -\nabla\varphi_2^*$$

Dentro de la esfera, como M es uniforme: $\vec{\nabla}\cdot\vec{M} = 0$, entonces $\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{H_1} = \vec{\nabla}\cdot(\frac{\overrightarrow{B_1}}{\mu_0} - \vec{M}) = 0$, de forma que $\nabla^2\varphi_1^* = 0$, es decir cumple Laplace. Fuera de la esfera magnética: $\overrightarrow{B_2} = \mu_0\vec{H}_2$, de forma que $\nabla^2\varphi_2^* = 0$, es decir también cumple Laplace. Ambos razonamientos se basan en $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$.

Condiciones de frontera:

En r=a:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow\ B_{1r}\big|_{r=a} = B_{2r}|_{r=a} \Rightarrow -\mu_0\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial r}\bigg|_{r=a} + \mu_0 M_0 cos\theta$$
$$= -\mu_0\frac{\partial\varphi_2^*}{\partial r}\bigg|_{r=a} (CB1),$$

$$\nabla\times\vec{H} = J_T \Rightarrow \quad H_{2\theta}|_{r=a} - H_{1\theta}|_{r=a} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_2^*}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial\theta}\right)\bigg|_{r=a} = 0 \quad (CB2)$$

No existen campos en el infinito. En $r\to 0$ el potencial no diverge (acotado).

$$\varphi_2^*(r\to\infty) = cte_1 \quad (CB3),$$

$$\varphi_1^*(r\to 0) = cte_2, \qquad (CB4)$$

b) Use las condiciones de borde de la parte a) y las soluciones a la ecuación de Laplace para determinar ambos potenciales escalares magnéticos.

Planteo las soluciones a Laplace en coordenadas esféricas hasta orden n=1, si las mismas verifican todas las condiciones de borde, por el teorema de unicidad, son la solución buscada.

$$\varphi_1^*(r,\theta) = (A_1 r + C_1/r^2)cos\theta + \frac{D_1}{r}$$

$$\varphi_2^*(r,\theta) = \left(A_2 r + \frac{C_2}{r^2}\right)cos\theta + \frac{D_2}{r}$$

Los términos 1/r deben ser nulos ya que no hay monopolos magnéticos (divergencia del campo magnético es cero), es decir $D_1 = D_2 = 0$. Por otro lado C_1 es nulo para que no haya divergencias en el origen (CB4) y A_2 es nulo para que no haya divergencias en el infinito (CB3). Reduciendo los potenciales a:

$$\varphi_1^*(r,\theta) = (A_1 r)cos\theta$$

$$\varphi_2^*(r,\theta) = \left(\frac{C_2}{r^2}\right)cos\theta$$

Aplicando las condiciones de borde CB1 y CB2, obtenemos las siguientes relaciones:

CB1 – $\mu_0 \frac{\partial \varphi_{*1}}{\partial r}\Big|_{r=a} - \mu_0 M_0 cos\theta = \mu_0 \frac{\partial \varphi_{*2}}{\partial r}\Big|_{r=a} \rightarrow A_1 - M_0 = -2C_2/a^3$

CB2 - $\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \theta}\right)\Big|_{r=a} = 0 \rightarrow A_1 a = C_2/a^2$

$$C_2/a^3 = M_0 - 2C_2/a^3$$

$$C_2 = \frac{M_0 a^3}{3}, A_1 = \frac{M_0}{3},$$

Los potenciales son:

$$\varphi_1^*(r,\theta) = \frac{M_0}{3} rcos\theta \qquad \varphi_2^*(r,\theta) = \frac{a^3}{r^2}\frac{M_0}{3}cos\theta$$

c) **Calcule los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en todo el espacio.**

$$\vec{H}_1 = -\nabla\varphi_1^* = -\left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial r}\hat{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \theta}\widehat{e_\theta}\right) = -\frac{M_0}{3}(cos\theta\hat{e_r} - sin\theta\widehat{e_\theta}) = -\frac{M_0}{3}\hat{z}$$

$$\vec{H}_2 = -\nabla\varphi_2^* = -\left(-\frac{2}{3}\frac{M_0 a^3}{r^3}cos\theta\hat{e_r} - \frac{1}{3}M_0\frac{a^3}{r^3}sin\theta\widehat{e_\theta}\right) - \frac{M_0}{3}\nabla\frac{a^3}{r^2}cos\theta$$
$$= \frac{M_0}{3}\frac{a^3}{r^3}(2cos\theta\hat{e_r} + sin\theta\widehat{e_\theta})$$

Dentro de la esfera magnética (región 1): $\overrightarrow{B_1} = \mu_0\vec{H}_1 + \mu_0\vec{M} = \frac{2}{3}\mu_0 M_0\hat{z}$

Fuera de la esfera magnética (región 2): $\overrightarrow{B_2} = \mu_0\vec{H}_2 = \frac{1}{3}\mu_0 M_0\frac{a^3}{r^3}(2cos\theta\hat{e_r} + sin\theta\hat{e_r})$

d) $\overrightarrow{J_M} = \nabla \times \vec{M} = 0$, $\overrightarrow{J_M} = \vec{M} \times \hat{n}\Big|_{r=a} = M_0\hat{z} \times \hat{e_r}|_{r=a} = M_0 sin\theta\widehat{e_\varphi}$ (regla mano dcha.)

Problema 3 –

La resistencia, R, de un cable de largo l , sección *A* y conductividad g, es: $R = \frac{l}{gA}$

Entonces, las resistencias de las bobinas son:

$$R_1 = \frac{1}{g}\frac{4l_1}{\pi(d_1)^2}, \quad R_2 = \frac{1}{g}\frac{4l_2}{\pi(d_2)^2} = \frac{1}{g}\frac{32l_1}{\pi(d_1)^2} = 8R_1$$

Como $l_1 = N_1(2\pi a) \rightarrow N_1 = \left(\frac{l_1}{2\pi a}\right)$ y análogamente, $N_2 = \left(\frac{l_2}{2\pi a}\right) = \left(\frac{2l_1}{2\pi a}\right) = 2N_1$

Las bobinas tienen la misma altura h:

$$h = N_1 d_1 = \left(\frac{l_1}{2\pi a}\right)d_1 \qquad \left(h = N_2 d_2 = 2N_1\frac{d_1}{2} = N_1 d_1\right)$$

A partir de la ley de Ampere podemos calcular el campo magnético en el interior de una bobina, i, con N_i vueltas, altura h, por el que circula una corriente I_i, y a partir de él, el flujo a través de la bobina debido a la corriente que pasa por ella y de allí su autoinductancia L_i :

$$B = \frac{\mu_o N_i I_i}{h} \rightarrow \ \phi_{ii} = NBA = N_i\left(\frac{\mu_o N_i I_i}{h}\right)(\pi a^2) \rightarrow L_i = \frac{\phi_{ii}}{I_i} = \frac{\mu_o {N_i}^2(\pi a^2)}{h} = \ \frac{\mu_o {N_i}^2}{h}\pi a^2$$

Entonces,

$$L_1 = N_1^2 \frac{\mu_o}{h}\pi a^2 = N_1^2 \frac{\mu_o}{N_1 d_1}\pi a^2 = \left(\frac{l_1}{2\pi a}\right)\frac{\mu_o}{d_1}\pi a^2 = \frac{\mu_o l_1 a}{2d_1}$$

Analogamente,

$$L_2 = \ N_2^2 \frac{\mu_o}{h}\pi a^2 = (2N_1)^2 \frac{\mu_o}{N_1 d_1}\pi a^2 = 4N_1^2 \frac{\mu_o}{N_1 d_1}\pi a^2 \ \rightarrow \ L_2 = \ 4\frac{\mu_o l_1 a}{2d_1} = 4L_1$$

Como todo el flujo de una bobina pasa por la otra, el coeficiente de acoplamiento es k=1 y la inductancia mutura resulta: $M \ = k\sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{L_1 L_2} = 2L_1$

(Obs: los flujos por cada una de las bobinas son: $\varphi_1 \ = L_1 I_1 + M I_2, \quad \varphi_2 \ = M I_1 + L_2 I_2$)

b) Inicialmente (t=0s), tenemos una corriente I_0 circulando por el primario, mientras que por el secundario, que está en circuito abierto no fluye corriente alguna.

A partir de t=0s, en la malla cerrada del primario tenemos:

$$R I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} = 0$$

Como el secundario se encuentra en circuito abierto en todo momento, para todo instante $I_2(t) = 0$, entonces, la ecuación se reduce a:

$$R I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0 \ \rightarrow \ I_1(t) = I_0 \exp(-t/\tau) \quad \text{donde} \quad \tau = \frac{L_1}{R_1}$$

c) En el secundario, el voltaje inducido entre sus extremos es: $V_2 = R I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt} = 0$

y como la corriente $I_2(t) = 0$ en todo tiempo, resulta:

$$V_2(t) = M\frac{dI_1}{dt} = -M\frac{I_0}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \ \ 2R_1 I_0 \exp(-tR_1/L_1)$$

d) La energía que se disipa durante el transitorio es la que había almacenada en el instante inicial en el sistema de las dos bobinas, recordando que $I_2 = 0$:

$$U_0 = \frac{1}{2}L_1(I_1(t=0))^2 + \frac{1}{2}L_2(I_2(t=0))^2 + \frac{1}{2}M I_1(t=0) I_2(t=0) = \frac{1}{2}L_1 I_0^2$$

Alternativamente, puede hallarse la energía total disipada integrando entre 0 e infinito la potencia instantánea disipada a través de R_1, $\mathrm{P(t)} = {I_1}^2(t)\, R_1$, llegando al mismo resultado.