Soluciones Examen Electromagnetismo

27 de Julio de 2021

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería

Solución

a. $V_0 = k_1 cos(\theta) + k_2 cos(2\theta) = k_1 cos(\theta) + k_2(2\cos^2\theta - 1)$,

$$V_0 = k_1 P_1 + k_2\left(2\frac{2P_2+1}{3} - 1\right) = k_1 P_1 + \frac{4}{3}k_2 P_2 - \frac{k_2}{3}P_0$$

b. Tomo como soluciones los primeros 3 términos del desarrollo

$$\varphi_1(r,\theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r}\right) + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)P_1(\cos\theta) + \left(A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3}\right)P_2(\cos\theta) \quad r < R$$
$$\varphi_2(r,\theta) = \left(C_0 + \frac{D_0}{r}\right) + \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2}\right)P_1(\cos\theta) + \left(C_2 r^2 + \frac{D_2}{r^3}\right)P_2(\cos\theta) \quad r > R$$

Como φ_1 no puede divergir cuando r tiende a cero, entonces $B_0 = B_1 = B_2 = 0$. Como φ_2 no puede tener divergencias en el infinito (porque nada en el problema lo justifica), entonces $C_0 = C_1 = C_2 = 0$.

$$\varphi_1(r,\theta) = A_0 + A_1 r P_1(\cos\theta) + A_2 r^2 P_2(\cos\theta)$$

$$\varphi_2(r,\theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + \frac{D_1}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{D_2}{r^3}P_2(\cos\theta)$$

Por continuidad del potencial en $r = R$ podemos sacar todos los terminos.

$$A_0 = -\frac{k_2}{3}, A_1 = \frac{k_1}{R}, A_2 = \frac{4}{3}\frac{k_2}{R^2}$$

$$C_0 + \frac{D_0}{R} = -\frac{k_2}{3}, D_1 = k_1 R^2, D_2 = \frac{4}{3}k_2 R^3$$

Falta la condición de que el potencial en el infinito debe ser cero, $C_0 = 0$.

Entonces:

$$\varphi_1(r,\theta) = -\frac{k_2}{3} + \frac{k_1}{R} r P_1(\cos\theta) + \frac{4}{3}\frac{k_2}{R^2} r^2 P_2(\cos\theta)$$

$$\varphi_2(r,\theta) = -\frac{k_2}{3}\frac{R}{r} + \frac{k_1 R^2}{r^2}P_1(\cos\theta) + \frac{4}{3}k_2 R^3 \frac{1}{r^3}P_2(\cos\theta)$$

Como los potenciales verifican la ecuación de Laplace Laplace y las condiciones de borde, por el teorema de unicidad estos potenciales son únicos.

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot e_r = (\varepsilon - \varepsilon_0)E_{1r} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\left[\frac{k_1}{R}P_1 + \frac{8}{3}\frac{k_2}{R}P_2\right]$$

$$\sigma_L = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon E_{1n}$$

$$\sigma_L = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \varepsilon \left[\frac{k_1}{R} P_1 + \frac{8}{3}\frac{k_2}{R} P_2\right] - \varepsilon_0 \left[\frac{k_2 R}{3R^2} - \frac{2k_1}{R} P_1 - \frac{4k_2}{R} P_2\right]$$

$$\sigma_L = \frac{P_1}{R} k_1(\varepsilon + 2\varepsilon_0) + 4\frac{P_2 k_2}{R}\left(\frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon_0\right) - \frac{\varepsilon_0 k_2}{3R}$$

Q neta:

$$Q = 2\pi \oiint \sigma_L R^2 sin\theta d\theta$$

Usando:

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) sin\theta d\theta = \frac{\delta_{nm}}{n + 1/2}$$

$$Q = 2\pi \oiint \left[\frac{P_1 P_0}{R} k_1(\varepsilon + 2\varepsilon_0) + 4\frac{P_2 k_2 P_0}{R}\left(\frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon_0\right) - \frac{\varepsilon_0 k_2}{3R}\right] R^2 sin\theta d\theta$$

$$Q = -\frac{\varepsilon_0 k_2 4\pi R}{3}$$

Momento dipolar:

$$\vec{p} = \oiint (\sigma_L + \sigma_p) R^2 sin\theta d\theta d\phi \; R(cos\theta \hat{k} + sin\theta cos\phi \hat{\imath} + sin\theta sin\phi \hat{\jmath})$$

Los términos en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ se anulan por la integral en $d\phi$. Para el termino en $\hat{k}$ recordemos que $cos\theta = P_1$, entonces solo será no nulo el termino con $cos\theta$ en la densidad de carga libre.

$$\vec{p}_L = 2\pi \oiint \frac{P_1}{R} k_1(\varepsilon + 2\varepsilon_0) R^2 sin\theta d\theta \; R(P_1 \hat{k}) = \hat{k} k_1(\varepsilon + 2\varepsilon_0)\frac{4\pi R^2}{3}$$

$$\vec{p}_P = -2\pi \oiint \frac{P_1}{R} k_1\big((\varepsilon - \varepsilon_0)\big) R^2 sin\theta d\theta \; R(P_1 \hat{k}) = -\hat{k} k_1(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{4\pi R^2}{3}$$

$$\vec{p} = \hat{k} k_1(3\varepsilon_0)\frac{4\pi R^2}{3}$$

Ejercicio 2.

Solución

a. En coordenadas cilíndricas $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = kRe_\theta$ y volumétrica $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = -k\hat{e}_\theta$.
b. $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} = \vec{M} \cdot \hat{e}_r = 0$, $\rho_M .= \nabla \cdot \vec{M} = 0$
c. El campo magnético $\vec{H}$ queda completamente determinado por las corrientes de transporte y por el potencial escalar magnético. Este último se determina como el potencial electrostático pero con las cargas superficiales y volumetría de magnetización. Como las tres cantidades mencionadas son cero, $\vec{H}$ también es cero en este problema

d. Como $\vec{H}$ es cero simplemente alculamos $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$, es decir que $\vec{B} = 0$ afuera del cilindro y $\vec{B} = \mu_0 kr\hat{z}$.

Otra forma de resolverlo.

El campo producido por estas corrientes es el de solenoides infinitos concéntricos. El campo de un solenoide es $\mu_0 nI$ dentro del solenoide y cero fuera, con n número de vueltas por unidad de longitud, e I la corriente que circula por el cable. La corriente superficial verifica $nI = K$ y para la volumétrica en un radio r es $nI = Jdr$.

Las corrientes superficiales producen un campo $kR\mu_0\hat{z}$ dentro y cero fuera.

La contribución de las corrientes volumétricas se puede calcular de la siguiente forma

$$d\vec{B} = -\mu_0 kdr\hat{z} \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 \int_r^R kdr\hat{z} = -\mu_0 k(R-r)\hat{z}$$

Y cero fuera del solenoide. Si sumamos ambas contribuciones $\vec{B} = kr\mu_0\hat{z},\ r \leq R$.

Ejercicio 3.

Solución

a. Primero vamos a calcular la fem inducida en la espira.

$$\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A}, \vec{B} = B_0\hat{x}, \qquad \vec{A} = a^2(sin\theta\hat{x} - cos\theta\hat{y})$$

Elijo el área tal que la circulación sea en la dirección que muestra la figura.

$$\Phi_B = B_0 a^2 sin\theta = B_0 a^2 sin\omega t$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B_0 a^2\omega cos\omega t$$

El circuito es:

$$\varepsilon_i = RI + \frac{dI}{dt}L = -B_0 a^2 \omega cos\omega t$$

Se resuelve buscando una solución particular y una homogénea:

Particular: $RI + \frac{dI}{dt}L = 0 \rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \rightarrow \ln(I) - \ln(I_0) = -\frac{R}{L}t$

$$I(t) = Ae^{-Rt/L}$$

La solución homogénea se resuelve como un estacionario con $V_0 = -B_0 a^2\omega$:

$$RI + Z_L I = V_0 \rightarrow I = \frac{V_0}{R + i\omega L} = \frac{V_0(R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}, \qquad \varphi = artg\left(-\frac{\omega L}{R}\right)$$

Esta corriente es:

$$I(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t+\varphi)$$

Si aplicamos la condición inicial:

$$A - \frac{B_0a^2\omega:}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\varphi) = 0 \rightarrow A = \frac{B_0a^2\omega: R}{R^2+\omega^2L^2}$$

$$I(t) = \frac{B_0a^2\omega}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\ e^{-\frac{Rt}{L}} - \cos(\omega t+\varphi)\right]$$

b. El torque externo $\vec{\tau}_e$ debe ser igual y opuesto al torque ejercido por el campo magnético sobre la espira $\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$, con $\vec{m} = I\vec{A} = Ia^2(sin\omega t\hat{x} - cos\omega t\hat{y})$

$$\vec{\tau} = Ia^2(sin\omega t\hat{x} - cos\omega t\hat{y})\times B_0\hat{x} = Ia^2cos\omega t\hat{z}$$

$$\vec{\tau}_e = -IB_0\,a^2cos\omega t\hat{z}$$

c. Como el sistema está en régimen estacionario desprecio la componente transitoria.

$$I(t) = -\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t+\varphi)$$

Como estoy en régimen es lo mismo integrar entre $2n\pi/\omega$ y $(2n+1)\,\pi/\omega$ o entre 0 y π/ω.

$$U = \int_o^{\pi/\omega} P(t)dt$$

$$P(t) = RI^2 = R\frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$U = \int_o^{\pi/\omega} R\frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\cos^2(\omega t+\varphi)\,dt = R\frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\int_0^{\pi/\omega}\frac{1+cos(2\omega t+2\varphi)}{2}dt$$

$$U = R\frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\left[\frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{4}\sin(2\omega t+2\varphi)|_0^{\pi/\omega}\right]$$

$$U = R\frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\left[\frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{2}(\sin(2\pi+2\varphi) - \sin(2\varphi))\right] = R\frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\frac{\pi}{2\omega}$$