Soluciones

Examen Electromagnetismo (1128) – 22 de diciembre de 2023

Ejercicio 1

a) Consideramos coordenadas esféricas. Calculamos la densidad superficial de carga de polarización en $r = a$ como:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot (\hat{e}_r) = P_0 cos\theta$$

La densidad volumétrica de polarización es:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = 0,$$

La carga neta total es (haciendo el CV $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta\, d\theta$):

$$Q_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_0 cos\theta\, sin\theta a^2 d\theta\, d\varphi = P_0 2\pi \int_1^{-1} -udu = P_0 2\pi \frac{u^2}{2}\bigg|_{-1}^{1} = 0$$

b)

i. Partiendo de:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

En ninguna región existe carga libre, por lo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L = 0$, en todo el espacio.

En la región (1), $r < a$, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ y como $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ entonces también $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, existe un potencial φ_1, tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi_1$. Y como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, el potencial φ_1 cumple la ecuación de Laplace: $\nabla^2 \varphi_1 = 0$

Fuera de la esfera (región 2, $r > a$), estamos en el vacío, así que $\vec{P} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ya que sabíamos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$. Como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, existe un potencial φ_2, tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi_2$. Y como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, el potencial φ_2 cumple la ecuación de Laplace para $r > a$: $\nabla^2 \varphi_2 = 0$.

ii. Las condiciones de frontera del potencial son

$$\varphi_1(r \rightarrow 0)\ no\ diverge\ \ (CB1),$$

$$\varphi_2(r \rightarrow \infty)\ no\ diverge\ \ (CB2),$$

En $r = a$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow D_{1r} = D_{2r} \quad (\sigma_L = 0) \Rightarrow -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\bigg|_a + P_0 cos\theta = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_a \quad (CB3),$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow\ E_{2t} = E_{1t}\ \ o\ \ \varphi_1(a,\theta) = \varphi_2(a,\theta) \quad (CB4)$$

c)

i. Tomamos hasta primer orden (n=1) en las soluciones de Laplace en coordenadas esféricas, y si verifica las CB entonces es la solución (teorema de unicidad de la solución).

Tomamos

$$\varphi_1(r,\theta) = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right) cos\theta + A_0 + \frac{B_0}{r}, \quad r < a$$
$$\varphi_2(r,\theta) = \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2}\right) cos\theta + C_0 + \frac{D_0}{r}, \ r > a$$

Por la CB1, $B_1 = B_0 = 0$, y por CB2, $C_1 = 0$. E termino D_0, corresponde, a menos de una constante multiplicativa, a la carga neta en la esfera y como no hay carga neta, debe ser $D_0 = 0$.

$$\varphi_1(r,\theta) = (A_1 r) cos\theta + A_0,$$
$$\varphi_2(r,\theta) = \left(\frac{D_1}{r^2}\right) cos\theta + C_0,$$

De CB4 tenemos $\varphi_1(a,\theta) = \varphi_2(a,\theta)$

$$(A_1 a) cos\theta + A_0 = \left(\frac{D_1}{a^2}\right) cos\theta + C_0,$$
$$\left(A_1 a - \frac{D_1}{a^2}\right) cos\theta + (A_0 - C_0)1 = 0$$

Como los polinomios de Legendre son ortogonales entre sí, los factores que multiplican a $P_0(cos\theta) = 1$ y a $P_1(cos\theta) = cos\theta$, deben ser nulos. Entonces:

$$A_0 = C_0, A_1 a = \frac{D_1}{a^2}$$

Ahora, aplicando la CB 3

$$-\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right|_a + P_0 cos\theta = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right|_a$$
$$-\varepsilon_0 (A_1) cos\theta + P_0 cos\theta = \varepsilon_0 2 \frac{D_1}{a^3} cos\theta$$
$$P_0 = \varepsilon_0 2 \frac{D_1}{a^3} + \varepsilon_0 (A_1) = \varepsilon_0 3 \frac{D_1}{a^3}$$
$$D_1 = \frac{P_0 a^3}{3\varepsilon_0}, A_1 = \frac{P_0}{3\varepsilon_0}$$

Entonces los potenciales son:

$$\varphi_1(r,\theta) = \frac{P_0}{3\varepsilon_0} r cos\theta + A_0 = \frac{P_0}{3\varepsilon_0} z + A_0,$$
$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{P_0 a^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^2}\right) cos\theta + A_0,$$

ii. El potencial en un desarrollo dipolar es

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Dada la simetría del problema, $\vec{p}$ es según $\hat{k}$, entonces tenemos:

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^2}\right) cos\theta = \frac{P_0 a^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^2}\right) cos\theta \to \vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{P}$$

Lo mismo podía deducirse simplemente por la definición entre $\vec{p}$ y $\vec{P}$.

d)

$$\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1(r,\theta) = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla\varphi_2(r,\theta) = \frac{2P_0a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}cos\theta\hat{e}_r + \frac{P_0a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}sin\theta\hat{e}_\theta$$

Ejercicio 2

a) Tomo por la rama central el flujo magnético central, Φ_c , hacia arriba, por la rama derecha, Φ_d, `sentido horario y por la rama izquierda Φ_I, sentido antihorario, de forma que en los nodos se cumple:

$$\Phi_\mathrm{c} = \Phi_\mathrm{d} + \Phi_\mathrm{I}$$

Las reluctancias en las zonas con permeabilidad infinita resultan despreciables, por lo que solo resta considerar las reluctancias del material con μ_1 y de los entrehierros con μ_0. Entonces escribo las siguientes dos mallas:

1. Malla que recorre todo el exterior en el sentido horario:

$$\frac{\Phi_\mathrm{d}z}{\mu_0 A} - \frac{\Phi_\mathrm{I}z}{\mu_0 A} = 0 \rightarrow \Phi_\mathrm{d} = \Phi_\mathrm{I}\ y\ \Phi_\mathrm{c} = 2\Phi_\mathrm{d} = 2\Phi_\mathrm{I}$$

2. Ahora tomamos la malla que recorre la rama central y derecha en ese mismo sentido:

$$\frac{\Phi_\mathrm{d}z}{\mu_0 A} + \Phi_\mathrm{c}\left(\frac{z}{\mu_0 A} + \frac{d_1}{\mu_1 A}\right) = NI$$

$$\frac{z}{\mu_0 A}\frac{\Phi_\mathrm{c}}{2} + \Phi_\mathrm{c}\left(\frac{z}{\mu_0 A} + \frac{d_1}{\mu_1 A}\right) = NI$$

$$\Phi_\mathrm{c}\left(\frac{z}{\mu_0 A}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1 A}\right) = NI \ \rightarrow \Phi_\mathrm{c} = \frac{NIA}{\left(\frac{z}{\mu_0}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)}$$

Hallamos la autoinductancia considerando las N espiras

$$L = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{N}\Phi_c)}{dI} = \frac{N^2 A}{\left(\frac{z}{\mu_0}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)}$$

b) Ahora vamos a calcular los campos:

En el material con permeabilidad infinita,

$$H_\infty = 0,$$

En la rama central,

$$\mathrm{B_c} = \frac{\Phi_c}{A} = \frac{NI}{\left(\frac{z}{\mu_0}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)} \rightarrow H_{c,\mu_1} = \frac{B_c}{\mu_1}, \qquad H_{c,\mu_0} = \frac{B_c}{\mu_0}$$

En las ramas izquierda y derecha,

$$\mathrm{B_d} = \mathrm{B_I} = \frac{B_c}{2} = \frac{NI}{\left(3\frac{z}{\mu_0} + 2\frac{d_1}{\mu_1}\right)} \rightarrow H_{I,\mu_0} = H_{d,\mu_0} = \frac{B_c}{2\mu_0}$$

c) Ahora calculemos la energía magnética:

$$U = \frac{1}{2}\int \vec{H} \cdot \vec{B}\, dV$$

Solo debemos integrar en las zonas donde H no sea cero, es decir en los entrehierros y en el material con μ_1

$$U = \frac{1}{2}\int \vec{H} \cdot \vec{B}\, dV = \frac{1}{2}2\left(\frac{B_c}{2}\right)^2 \frac{1}{\mu_0} zA + \frac{1}{2}(B_c)^2 \frac{1}{\mu_0} zA + \frac{1}{2}(B_c)^2 \frac{1}{\mu_1} d_1 A$$

$$U = \frac{1}{2}(B_c)^2\left(\frac{1}{2\mu_0} zA + \frac{1}{\mu_0} zA + \frac{1}{\mu_1} d_1 A\right) = \frac{1}{2}(B_c)^2 A\left(\frac{3}{2}\frac{z}{\mu_0} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{N^2 I^2 A}{\left(\frac{z}{\mu_0}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)} = \frac{1}{2} L I^2$$

d)

Calculo la fuerza magnética como $\vec{F} = \vec{\nabla} U\Big|_I = \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_I \hat{z}$, donde $\hat{z}$ indica la dirección en la que crece z.

$$\vec{F} = \frac{3}{4}\frac{N^2 I^2 A}{\left(\frac{z}{\mu_0}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)^2}\frac{1}{\mu_0}(-\hat{z}) \rightarrow \vec{F} + \vec{F}_g = 0 \rightarrow \frac{3}{4}\frac{N^2 I^2 A}{\left(\frac{z}{\mu_0}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)^2}\frac{1}{\mu_0} = mg$$

$$I = \sqrt{\frac{4mg\mu_0}{3AN^2}}\left(\frac{z_0}{\mu_0}\frac{3}{2} + \frac{d_1}{\mu_1}\right)$$

Ejercicio 3

Pasamos a escribir mallas con fasores de corrientes.

a) i) Escribimos las mallas

$$V_0 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \ \ (1)$$

$$0 = R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \ \ (2)$$

ii) Para resolver primero despejamos de (2),

$$(R_2 + j\omega L_2)I_2 = j\omega M I_1 \rightarrow I_2 = \frac{j\omega M}{(R_2 + j\omega L_2)} I_1$$

Sustituimos en (1)

$$V_0 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M \frac{j\omega M}{(R_2 + j\omega L_2)} I_1$$

$$V_0 = (R_1 + j\omega L_1)I_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2)} I_1$$

$$V_0 = \frac{I_1}{(R_2 + j\omega L_2)} [(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + j\omega L_2)}{[(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]} V_0$$

$$I_2 = \frac{j\omega M}{[(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]} V_0$$

b) Para hallar Z_{eq} vista desde a fuente debo escribir $V_0 = Z_{eq} I_1$

$$Z_{eq} = \frac{[(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]}{(R_2 + j\omega L_2)}$$
$$= \frac{[(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} (R_2 - j\omega L_2)$$

$$Z_{eq} = \frac{[(R_2^2 + \omega^2 L_2^2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2 (R_2 - j\omega L_2)]}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

c) Hallemos el voltaje en la resistencia R_2

$$V_2 = R_2 I_2 = \frac{j\omega M R_2 V_0}{[(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]}$$

$$\frac{V_2}{V_0} = \frac{j\omega M R_2}{[(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]}, \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{(R_2 + j\omega L_2)}$$

d) Si se cortocircuita, $R_2 = 0$,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{M}{L_2}, \qquad \frac{V_2}{V_0} = 0$$

Si pasa el mismo flujo por ambas bobinas se cumple que $M^2 = L_1 L_2$.

La potencia instantánea disipada por el circuito es la disipada por R_1,

$$P(t) = i(t)v(t) = R_1 i^2(t) = R_1 \left(Re(I_1 e^{j\omega t})\right)^2,$$

con $I_1 = \frac{(j\omega L_2)}{[(j\omega L_2)(R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2]} V_0 = \frac{(j\omega L_2)}{j\omega L_2 R_1} V_0 \rightarrow I_1 = \frac{V_0}{R_1}$

Entonces,

$$P(t) = i(t)v(t) = R_1 i^2(t) = \frac{V_0^2}{R_1}\cos^2(\omega t)$$

El promedio temporal del $\cos^2(\omega t)$ en un periodo es ½. Entonces la potencia media disipada resulta:

$$P_m = \frac{V_0^2}{2R_1}$$

También se podía obtener con la expresión:

$$P_m = \frac{1}{2}Re(V_0 I_1^*) = \frac{V_0^2}{2R_1}$$