Examen de ELECTROMAGNETISMO, 26/07/2016 **– Soluciones –**

1) Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas: $\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}=0.$

Ansatz: $\varphi(x,y)=X(x)Y(y)$.

Sustituyendo en la ec. de Laplace se obtiene: $\frac{d^2X(x)}{X(x)dx^2}=-\frac{d^2Y(y)}{Y(y)dy^2}=C\ (const.)$

La condición de frontera $\varphi(x,y)=0$ en $x=0$ y en $x=L$ se satisface si se toma $X(x)=V_0sen(5\pi x/L)$, de modo que $C=-(\frac{5\pi}{L})^2$.

La solución de la ecuación para $Y(y)$ tal que se verifique la condición de frontera en el plano $y=0$, $\varphi(x,0)=X(x)Y(0)=V_0sen(5\pi x/L)$, es:

$$Y(y)=\exp(-5\pi y/L)$$

(la solución con exponente con signo positivo no es físicamente razonable para $y\to\infty$).

En conclusión;

a) el potencial electrostático en la región entre las placas vale

$$\varphi(x,y)=V_0sen(5\pi x/L)\exp(-5\pi y/L)$$

b) El campo eléctrico es $\vec{E}=-\nabla\varphi$.

la densidad de carga sobre las placas conndductoras es proporcional a la componente normal (saliente de la placa) del campo: $\vec{E}\cdot\vec{n}=\sigma/\varepsilon_0$, donde σ es la densidad de carga, y $\vec{n}$ el versor normal saliente de la placa.

Sobre la placa izquierda $\vec{n}=(1,0)$, y sobre la placa derecha $\vec{n}=(-1,0)$. Entonces sobre la placa izquierda (para $x=0$);

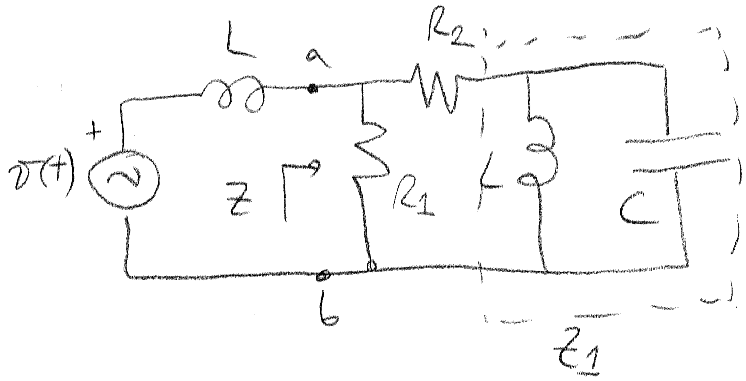
$\sigma=\varepsilon_0E_x(0,y)=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y)=-(5\pi\varepsilon_0/L)V_0\exp(-5\pi y/L)$.

Sobre la placa derecha (para $x=L$);

$\sigma=-\varepsilon_0E_x(L,y)=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}(L,y)==-(5\pi\varepsilon_0/L)V_0\exp(-5\pi y/L)$.

②

a) $Z_1 = \dfrac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$



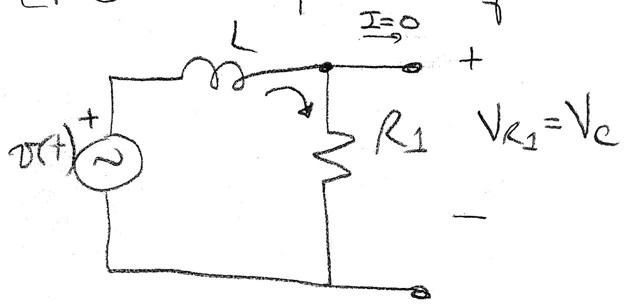
$$\Rightarrow Z = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}} \right)^{-1}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{R} + \frac{1-\omega^2 LC}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L} \Rightarrow \boxed{Z = R\,\frac{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}{2R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}}$$

b) Cuando el circuito LC está en resonancia, $Z_1 = \infty \Rightarrow$ no hay corriente por R_2

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

El circuito equivalente queda:



$$\Rightarrow V_e = V_{R_1} = \frac{R}{R+j\omega L} V_0 \quad (V_0 = \sqrt{2}\,V_{rms})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_e(t) = \frac{R\,V_{rms}\sqrt{2}}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}$$

c) $\overline{P}_{fuente} = V_{rms}\, I_{rms} \cos\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{P}_{fuente} = \frac{V_{rms}^2}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right) = \overline{P}_{R_1} + \underbrace{\overline{P}_{R_2}}_{=0 \text{ (no hay corriente)}} = \overline{P}_{R_1}}$$

③ a) Ampère $\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_1$ $\mathcal{C}$ cfa radio r $(a \leq r \leq 2a)$

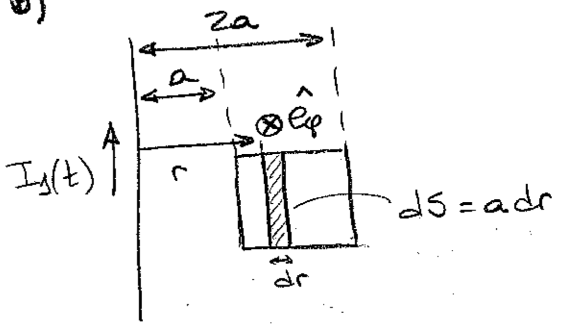
$\Rightarrow H(2\pi r) = I_1 \longrightarrow r_{sat} = \dfrac{I_1}{2\pi H_{sat}}$

Material completamente sin saturar: $r_{sat} \leq a$

$I_1 \leq (2\pi a) H_{sat}$

$\Rightarrow \boxed{I_0 = (2\pi a) H_{sat}}$

b)



Ampère:

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_1 + N I_2$

$H(2\pi r) = I_1 + N I_2$

$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r},t) = \dfrac{I_1 + N I_2}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$

material sin saturar $\rightarrow B = \mu H$ con $\mu = \dfrac{B_{sat}}{H_{sat}}$ $(|H| \leq H_{sat})$

$d\phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{S}$

$d\phi_B = \dfrac{\mu(I_1 + N I_2)}{2\pi r}\hat{e}_\varphi \cdot (a\,dr\,\hat{e}_\varphi)$

$\phi_B = \dfrac{\mu(I_1+NI_2)a}{2\pi}\displaystyle\int_a^{2a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu a(\ln 2)}{2\pi}(I_1 + N I_2)$

N vueltas $\rightarrow$ $\boxed{\phi_B^{(N)} = \dfrac{\mu N a(\ln 2)}{2\pi}(I_1 + N I_2)}$ $(\phi_B^{(N)} = N\phi_B)$

$M = \dfrac{\mu N a(\ln 2)}{2\pi}$

$L = NM$

c) $\mathcal{E} - R I_2 - \dfrac{Q_2}{C} = 0$; $I_2 = \dot{Q}_2$; $\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi_B^{(N)}}{dt}$

$\dfrac{d}{dt}\downarrow$ $-\dfrac{d^2\phi_B^{(N)}}{dt^2} - R\dot{I}_2 - \dfrac{1}{C}I_2 = 0$ $\quad (\phi_B^{(N)} = M I_1 + L I_2$

$-M\ddot{I}_1 - L\ddot{I}_2 - R\dot{I}_2 - \dfrac{1}{C}I_2 = 0 \Leftarrow$ $I_1 = I_0 e^{j\omega t}$

$I_2 = I_{20} e^{j\omega t}$

con $I_{20} = |I_{20}| e^{j\phi}$

$-M\ddot{I}_1 = L\ddot{I}_2 + \dfrac{1}{C}I_2 + R\dot{I}_2$

$M\omega^2 I_0 = \left[\left(-L\omega^2 + \dfrac{1}{C}\right) + j\omega R\right] I_{02}$

$\boxed{I_{02} = \dfrac{M\omega^2 I_0}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) + jR\omega}} = \dfrac{M\omega^2 I_0\left(\frac{1}{C} - L\omega^2 - jR\omega\right)}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + R^2\omega^2}$

$|I_{02}| = \sqrt{I_{02} I_{02}^*} = \dfrac{M\omega^2 I_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + R^2\omega^2}}$; $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{\mathrm{Im}(I_{02})}{\mathrm{Re}(I_{02})} = \dfrac{-R\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2}$

—x—