Soluciones

Examen Electromagnetismo - Febrero

Ejercicio 1

a) Partiendo de:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_L = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

En ninguna región existe ρ_L, por lo que $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$. Tanto dentro como fuera estamos en el vacío, así que $\vec{P} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$. Como $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, existe un potencial φ, tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$. Y como $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, el potencial φ cumple la ecuación de Laplace para $r < a$, y $r > 2a$.
En la región $a < r < 2a$, sigue siendo $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$ y como $\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$ entonces también $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$. Entonces sigue existiendo un potencial que verifica Laplace.

b) La solución es en coordenadas cilíndricas y tiene simetría según z. Los términos $ln(r)$ no pueden aparecer ya que darían lugar a campos con divergencia no nula, es decir carga libre en el problema.

En el origen el potencial debe ser regular, ya que nada sugiere una divergencia $\varphi_1(r\rightarrow 0)\rightarrow cte_1$. En r tendiendo a infinito el potencial debe tender a una constante $\varphi_3(r\rightarrow\infty)\rightarrow cte_3$.

En $r = a$,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow D_{1r} = D_{2r} \Rightarrow -\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_a = -\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_a + P_0 cos\theta \ \ (CB3),$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \ E_{2t} = E_{1t} \ \ o \ \ \varphi_1(a,\theta) = \varphi_2(a,\theta) \quad (CB4)$$

En $r = 2a$,

$$-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\right|_{aa} = -\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{aa} + P_0 cos\theta \ \ (CB5)$$

$$\varphi_3(2a,\theta) = \varphi_2(2a,\theta) \ \ (CB6)$$

c)

Teniendo en cuenta las condiciones de borde y que solo dependen de $cos\theta$, me quedo en los tres casos hasta $n = 1$ en el desarrollo, únicamente con los términos en $cos\theta$. Además impuse las condiciones en cero e infinito eliminando los términos que divergen en cada caso.

$$\varphi_1(r,\theta) = A_1 r cos\theta + A_0, \qquad \varphi_2(r,\theta) = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r}\right)cos\theta + B_0, \ \ \varphi_3(r,\theta) = \frac{B_3}{r}cos\theta + C_0$$

$$r = a \rightarrow \ A_0 = B_0 \ A_1 = A_2 + \frac{B_2}{a^2}, \quad -A_1 = -\left(A_2 - \frac{B_2}{a^2}\right) + P_0/\varepsilon_0$$

$$r = 2a \ \ B_0 = C_0 \rightarrow \ \frac{B_3}{b^2} = A_2 + \frac{B_2}{b^2}, \quad \frac{B_3}{b^2} = -\left(A_2 - \frac{B_2}{b^2}\right) + P_0/\varepsilon_0$$

Tenemos que:

$$\frac{B_3}{4a^2} = A_1 - \frac{B_2}{a^2} + \frac{B_2}{4a^2} = A_1 - \frac{3B_2}{4a^2}$$

$$A_1 = \left(A_2 - \frac{B_2}{a^2}\right) - P_0/\varepsilon_0 \to A_1 = \left(A_1 - \frac{B_2}{a^2} - \frac{B_2}{a^2}\right) - P_0/\varepsilon_0 \to -P_0/\varepsilon_0 - \frac{2B_2}{a^2} = 0$$

$$\frac{P_0}{\varepsilon_0} = -\frac{2B_2}{a^2} \to B_2 = -P_0 a^2/2\varepsilon_0$$

$$A_1 = A_2 - P_0/2\varepsilon_0$$

$$\frac{B_3}{4a^2} = A_2 + \frac{B_2}{4a^2} = A_2 - \frac{P_0}{8\varepsilon_0}$$

$$\frac{B_3}{4a^2} = -\left(A_2 - \frac{B_2}{4a^2}\right) + \frac{P_0}{\varepsilon_0} = -A_2 - \frac{P_0}{8\varepsilon_0} + \frac{P_0}{\varepsilon_0} = -A_2 + \frac{7}{8}\frac{P_0}{\varepsilon_0}$$

$$0 = 2A_2 - M_0 \to A_2 = P_0/2\varepsilon_0$$

$$A_1 = 0, \qquad B_3 = \frac{3}{2\varepsilon_0} P_0 a^2$$

Entonces

$$\varphi_1(r,\theta) = A_1 r cos\theta + A_0 = A_0 \ \to \vec{E}_1 = 0 \ y \ \vec{D}_1 = 0$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^2}{r}\right) cos\theta + A_0 \ \to \vec{E}_2 = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) cos\theta \hat{e}_r + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) sin\theta \hat{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{D_2} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = -\frac{P_0}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) cos\theta \hat{e}_r + \frac{P_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) sin\theta \hat{e}_\theta + P_0 cos\theta \hat{e}_r - P_0 sin\theta \hat{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{D_2} = \frac{P_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) cos\theta \hat{e}_r - \frac{P_0}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) sin\theta \hat{e}_\theta$$

$$\varphi_3(r,\theta) = \frac{3}{2\varepsilon_0} P_0 \frac{a^2}{r} cos\theta + A_0, \qquad \vec{E}_3 = \frac{3}{2\varepsilon_0} P_0 \frac{a^2}{r^2} cos\theta \hat{e}_r + \frac{3}{2\varepsilon_0} P_0 \frac{a^2}{r^2} sin\theta \hat{e}_\theta \quad \vec{D}_3 = \varepsilon_0 \vec{E}_3$$

c) $\rho_P = \nabla \cdot \vec{P} = 0, \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot (\pm \hat{e}_r) = \pm P_0 cos\theta$
El + indica $r = 2a$ y el menos $r = a$.

Ejercicio 2

a) El campo magnético generado por el dipolo magnético puntual se puede escribir como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \to \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

O a partir del potencial escalar magnético de un dipolo puntual:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \to \vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi_m$$

Entonces, usando que $\vec{m} = m(t)\hat{z}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} m(t)(3z\vec{r} - r^2\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi(z^2+\rho^2)^{5/2}} m(t)\big(3z(z\hat{z} + \rho\hat{e}_\rho) - r^2\hat{z}\big)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m(t)((2z^2 - \rho^2)\hat{z} + 3z\rho\hat{e}_\rho)}{4\pi(z^2+\rho^2)^{5/2}}$$

b) Debemos calcular el flujo magnético a través de la espira para poder determinar la corriente inducida:

$$\phi_B = \int \vec{B}\cdot\hat{n}da = \int_o^r \int_0^{2\pi} \vec{B}\cdot\hat{z}\rho d\rho d\theta = \int_o^r \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 m(t)(2h^2 - \rho^2)}{4\pi(h^2+\rho^2)^{5/2}} \rho d\rho d\theta$$

$$\phi_B = -\frac{\mu_0 m(t)}{2} \int_0^r \frac{\rho^3}{(h^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} d\rho - \int_0^r \frac{2\rho h^2}{(h^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 m(t)}{2}\left[\left.\frac{2h^2 + 3\rho^2}{3(h^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_0^a - \left.\frac{2h^2}{3(h^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_0^a \right] = \frac{\mu_0 m(t)}{2}\left(\left.\frac{3\rho^2}{3(h^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_0^a \right)$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 m(t)}{2} \frac{a^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{a^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{dm}{dt} \rightarrow I_i = -\frac{\mu_0}{2R}\left(\frac{a^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{dm}{dt}$$

c) Para calcular la fuerza, puedo hallar la energía dipolo-campo, y realizar un gradiente de la misma.

$$\vec{F} = \nabla U = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$$

O mejor integramos:

$$\vec{F} = I_i \oint d\vec{l} \times \vec{B} = I_i \oint a d\theta \vec{e}_\theta \times (B_\rho \hat{e}_\rho + B_z \hat{e}_z) = -I_i a 2\pi B_\rho \hat{e}_z$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2R} \frac{a^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dm}{dt} a 2\pi \frac{\mu_0 a h 3}{4\pi(h^2+a^2)^{5/2}} m(t)\hat{e}_z$$

$$\vec{F} = \frac{3\mu_0^2}{4R} \frac{a^4 h}{(h^2+a^2)^4} \frac{dm}{dt} m(t)\hat{e}_z$$

d) En $t = t_0$

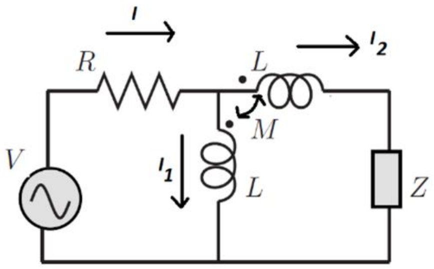
$$\vec{F} = \frac{3\mu_0^2}{4R} \frac{a^4 h}{(h^2+a^2)^4} AB\hat{e}_z$$

$Si\ A\ y\ B\ son > 0$ la espira sube, con $A < 0$ o $B < 0$, la espira baja. Si ambos son negativos la espira sube.

Ejercicio 3

El circuito de la figura es alimentado por una fuente de voltaje $V_0 cos\omega t = Re(V_0 e^{i\omega t})$.

a) Encuentre la impedancia equivalente del sistema. Definiendo las corrientes como muestra la figura:



$$V_0 = RI + i\omega L I_1 + i\omega M I_2 \quad (1)$$

$$V_0 = RI + i\omega L I_2 + i\omega M I_1 + Z I_2 \quad (2)$$

$$I = I_1 + I_2 \quad (3)$$

Despejamos I_2 de (2) y (3)

$$V_0 = RI + i\omega M(I - I_2) + (i\omega L + Z)I_2 = (R + i\,\omega M)I + (i\omega(L-M) + Z)I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{(i\omega(L-M) + Z)}(V_0 - (R + i\,\omega M)I)$$

Despejamos I_1 de (1) y (3)

$$V_0 = RI + i\omega L I_1 + i\omega M(I - I_1) = (R + i\,\omega M)I + i\omega(L-M)I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{i\omega(L-M)}(V_0 - (R + i\,\omega M)I)$$

Ahora

$$I = I_1 + I_2 = \left[\frac{1}{i\omega(L-M)} + \frac{1}{(i\omega(L-M) + Z)}\right](V_0 - (R + i\,\omega M)I)$$

$$I = \left[\frac{i2\omega(L-M) + Z}{-\omega^2(L-M)^2 + Zi\omega(L-M)}\right](V_0 - (R + i\,\omega M)I) = A(V_0 - (R + i\,\omega M)I)$$

$$I\big(1 + A(R + i\,\omega M)\big) = AV_0$$

$$V_0 = \frac{\big(1 + A(R + i\,\omega M)\big)}{A} I = Z_{eq} I$$

Entonces:

$$Z_{eq} = \frac{\big(1 + A(R + i\,\omega M)\big)}{A} = \frac{1}{A} + (R + i\,\omega M) = \frac{-\omega^2(L-M)^2 + Zi\omega(L-M)}{i2\omega(L-M) + Z} + (R + i\,\omega M)$$

$$Z_{eq} = \frac{-\omega^2(L-M)^2 + Zi\omega(L-M) + (R + i\,\omega M)(i2\omega(L-M) + Z)}{i2\omega(L-M) + Z}$$

$$Z_{eq} = \frac{-\omega^2(L^2 - M^2) + Zi\omega L + R(i2\omega(L-M) + Z)}{i2\omega(L-M) + Z}$$

b) Para que la potencia sea cero, debe ser cero la corriente por la resistencia, es decir I. Esto se logra con un Z_{eq} que diverge. Esto podría pasar si el elemento en Z es un capacitor,

Si miramos la expresión de Z_{eq} asumiendo $Z = -i/\omega C$, tenemos:

$$Z_{eq} = \frac{-\omega^2(L-M)^2 + \frac{1}{\omega C}\omega(L-M) + i\omega(R + i\omega M)(2(L-M) - \frac{1}{\omega C})}{i(2\omega(L-M) - \frac{1}{\omega C})}$$

Si $2\omega(L-M) - \frac{1}{\omega C} = 0 \to |Z_{eq}| \to \infty$. $\omega = \sqrt{1/2(L-M)C} = \omega_0$

$$C = \frac{1}{2\omega_0^2(L-M)}$$

c) Si $L = M$

$$Z_{eq} = \frac{(R + i\,\omega M)(Z)}{Z}$$

En la condición anterior el circuito es equivalente a un RL en serie.

$$Z_0 = (R + i\omega M) = \sqrt{R^2 + (\omega M)^2}\, e^{i\theta}, \qquad \theta = artg(\omega M/R)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega M)^2}} e^{-i\theta} \to I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega M)^2}} e^{i(\omega t - \theta)}$$

Para tener la corriente $I(t)$ debemos tomar la parte real:

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega M)^2}} \cos(\omega t - \theta)$$

d) Potencia disipada media:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)V(t)dt = \frac{1}{2} Re\left(V_o e^{i\omega t} I_0 e^{i\omega t + \theta}\right) = \frac{V_0^2}{2\sqrt{R^2 + (\omega M)^2}} cos\theta$$

$$\bar{P} = \frac{V_0^2 R}{2(R^2 + (\omega M)^2)}$$