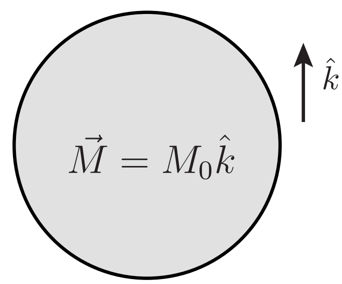
Electromagnetismo

Segundo parcial, 30 de noviembre de 2018

- Se deberá comunicar claramente los razonamientos realizados. Las respuestas correctas que no incluyan una correcta justificación, serán consideradas como incompletas.
- Se debe poner el nombre y documento en todas las hojas.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Ejercicio 1 Considere un sistema compuesto por una esfera de radio R magnetizada uniformemente con $\vec{M} = M_0\hat{k}$, inmersa en otro material infinito con las propiedades magnéticas del vacío (permeabilidad μ_0).



a) Demuestre que existe un potencial escalar magnético φ_m tal que el campo magnético se escribe como $\vec{B} = -\mu_0\nabla\varphi_m$ tanto afuera como adentro de la esfera.

Muestre que este potencial verifica la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi_m = 0$ afuera y adentro de la esfera.

b) Justifique que el potencial φ_m verifica las siguientes condiciones de borde en las regiones dentro (φ_1) y fuera (φ_2) de la esfera:

i- $\varphi_1(\vec{r})$ es regular para $r \to 0$.

ii- $\varphi_2(\vec{r}) = Cte$ para $r \to \infty$.

iii-
$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R}$$

iv-
$$\left.\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right)\right|_{r=R} = M_0\sin\theta$$

c) Calcule el potencial escalar magnético φ_m en todo el espacio, a menos de una constante aditiva en cada región.

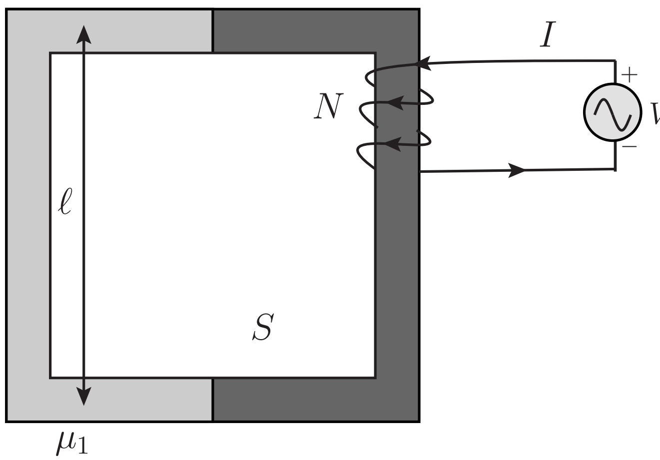
d) Calcule el campo magnético $\vec{B}$ en todo el espacio.

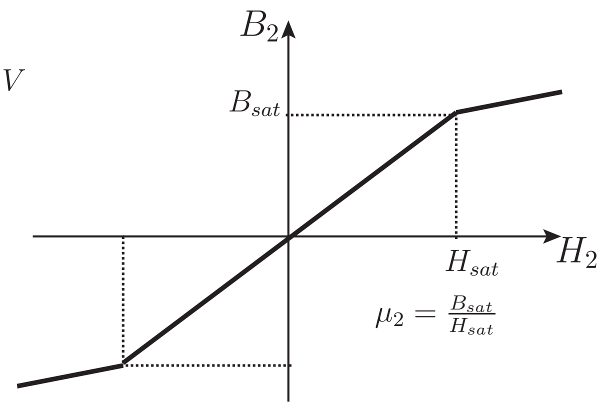
Sugerencia: Recuerde que en presencia de simetría azimutal y cuando el ángulo θ recorre todo el intervalo $[0, \pi]$ el potencial solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas más general tiene la forma

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(cos\theta)\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right),$$

donde $P_n(cos\theta)$ son los polinomios de Legendre: $P_0(cos\theta) = 1$, $P_1(cos\theta) = cos\theta$, $P_2(cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$, etc.

Ejercicio 2 El circuito de la figura izquierda tiene un núcleo magnético compuesto por dos materiales. El primero es lineal, de permeabilidad μ_1, y el segundo es un material saturable, cuya curva de saturación se muestra en la figura derecha. El núcleo tiene una sección transversal uniforme S y cuatro lados de longitud promedio ℓ. Se arrolla en el núcleo un bobinado de N vueltas que se conecta a una fuente de voltaje alterno $\mathcal{V}(t) = Re\left(Ve^{j\omega t}\right)$ en la zona del segundo material, como muestra la figura. El circuito se encuentra funcionando en régimen permanente.





Suponga por el momento que el material 2 se encuentra trabajando en la zona lineal.

a) Calcule la autoinductancia L del bobinado.

b) Determine los campos $|\vec{B}|$ y $|\vec{H}|$ en todo el circuito.

c) Halle la frecuencia mínima ω_0 de la fuente para que el material 2 no se sature.

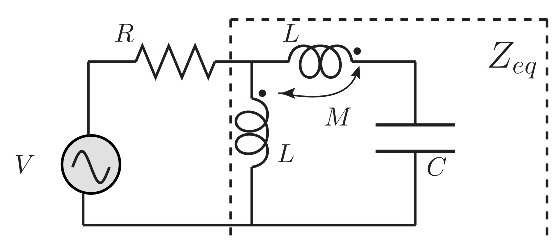
d) Calcule la energía media almacenada en el circuito.

Ejercicio 3 El circuito que se muestra en la figura está compuesto por una resistencia R, un condensador de capacidad C y dos bobinas de autoinductancias L e inductancia mutua M, conectados a una fuente de voltaje alterno $\mathcal{V}(t) = V cos(\omega t)$ según el diagrama.

a) Calcule la impedancia equivalente Z_{eq} de la parte derecha del circuito (zona punteada).

b) Halle la frecuencia ω_0 a la que debe operar el sistema para que la potencia disipada sea nula. En estas condiciones ¿cómo es la corriente que circula por la fuente?

c) Muestre que con el circuito operando en la frecuencia ω_0 de la parte (b), el módulo del voltaje en el condensador es el doble del módulo del voltaje de la fuente: $|V_C| = 2V$.



Nota: tenga en cuenta la convención de puntos que se indica en el diagrama para la inductancia mutua.