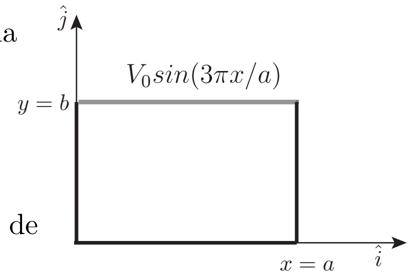
Electromagnetismo

Examen, 1º de febrero de 2019

- Se deberá comunicar claramente los razonamientos realizados. Las respuestas correctas que no incluyan una correcta justificación, serán consideradas como incompletas.
- Se debe poner el nombre y documento en todas las hojas.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Ejercicio 1 Considere el sistema bidimensional de la figura, donde tres placas ($y = 0$, $x = 0$ y $x = a$) están conectadas a tierra (potencial igual a 0) y una cuarta placa ($y = b$) a potencial $V_0 sen(3\pi x/a)$. El espacio entre las placas está vacío.



a) Pruebe que existe un potencial electrostático que verifica la ecuación de Laplace en la región dentro de las placas.

b) Escriba las condiciones de borde en este problema.

c) Resuelva la ecuación de Laplace para el potencial en coordenadas cartesianas. Para esto puede buscar una base de soluciones con la forma $\phi(x, y) = F(x)G(y)$.

i- Utilizando la condición de borde en $x = 0$ y $x = a$ pruebe que las soluciones para $F(x)$ son de la forma $sin(kx)$. Determine los valores posibles de k.

ii- Pruebe que las soluciones para $G(y)$ son combinaciones lineales de e^{ky} y e^{-ky}.

iii- Aplique las condiciones de borde faltantes y determine el potencial $\phi(x, y)$.

d) Calcule el campo eléctrico $\vec{E}(x, y)$ en la región entre las placas.

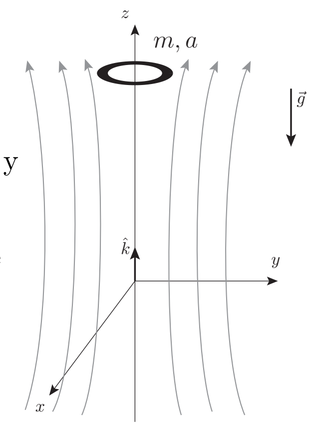
e) Determine la densidad de carga en cada una de las placas.

Nota: puede utilizar que las funciones $\{cos(\frac{n\pi x}{a}), sen(\frac{n\pi x}{a})\}_{n=0,1,2,...}$ son una base del espacio de funciones periódicas de período $2a$.

Ejercicio 2 Considere una región vacía donde existe un campo magnético $\vec{B} = B_\rho \hat{e}_\rho + B_z \hat{k}$, expresado en coordenadas cilíndricas, con simetría alrededor del eje z. En las proximidades del eje, la componente B_z se puede aproximar como $B_z \approx B_0 + Kz$, con B_0 y K constantes ($K < 0$). Considere que no hay campo eléctrico externo.

a) Sabiendo que el módulo del campo magnético está acotado en los puntos del eje z, demuestre que en la proximidades de este eje se cumple que $B_\rho \approx \frac{-K\rho}{2}$.

Considere ahora un pequeño anillo conductor de radio a, masa m, resistencia R y autoinductancia despreciable. Suponga que dicho anillo se sitúa en la región del campo magnético, de forma tal que su eje se corresponda con el eje z (como muestra la figura). Suponga que a continuación se deja caer el anillo desde el reposo.



b) Halle la fuerza magnética que el campo le genera al anillo en función de la intensidad de corriente que circule en él.

c) Determine la relación entre la intensidad de corriente en el anillo y su velocidad.

d) ¿Cuál es el valor límite que toman la velocidad y la intensidad de corriente cuando ha pasado un tiempo suficientemente largo?

e) Calcule la velocidad del anillo en función del tiempo.

Ejercicio 3 El circuito que se muestra en la figura está compuesto por dos resistencias R, un transformador y una fuente de voltaje alterno $V(t) = V\cos(\omega t)$ según muestra la figura. El núcleo del transformador de hierro dulce es un cuadrado de lados de longitud media l, sección S y permeabilidad μ. El transformador tiene dos bobinados, uno de N_1 vueltas y otro de N_2 vueltas. El sistema opera en régimen permanente.

a) Calcule las autoinductancias L_1 y L_2 de cada bobinado y la inductancia mutua M.

b) Calcule la impedancia equivalente Z_{eq} de la parte derecha del circuito (zona punteada).

c) Calcule la corriente que circula por la fuente si $N_1 = N_2$.