Examen Electromagnetismo

7 de Febrero de 2020

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería

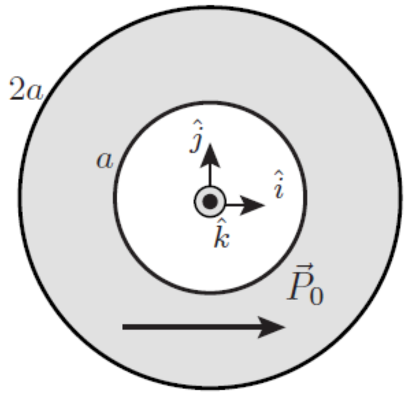
- Se deberá comunicar claramente los razonamientos realizados. Las respuestas correctas que no incluyan una correcta justificación, serán consideradas como incompletas.
- Se debe poner el nombre en todas las hojas.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Ejercicio 1

Un cilindro hueco de radios a y $2a$, esta polarizado con $\vec{P} = P_0\hat{\imath}$, mientras que su eje se encuentra en la dirección de $\hat{k}$ (ver figura). Todo el sistema está inmerso en el vacío. Trabaje en coordenadas cilíndricas.

a) Pruebe que existe un potencial electroestático φ definido como $\vec{E} = -\nabla\varphi$, que verifica la ecuación de Laplace para cada región del espacio, $r < a$ (1) , $a < r < b$ (2) y $r > b$ (3).

b) Justifique las seis condiciones de borde del problema:



i. $\varphi_1(r \to 0, \theta) \to cte_1$

ii. $D_{2r}(a, \theta) = D_{1r}\,(a, \theta)$

iii. $\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$

iv. $D_{2r}(2a, \theta) = D_{3r}(2a, \theta)$

v. $\varphi_2(2a, \theta) = \varphi_3(2a, \theta)$

vi. $\varphi_3(r \to \infty, \theta) \to cte_3$

Siendo $\varphi_1, \varphi_2\ y\ \varphi_3$ los potenciales de las regiones 1, 2 y 3 definidos en a).

c) Aplicando las condiciones de borde, y la simetría del problema, determine el potencial electroestático en cada región del espacio.

d) Encuentre los campos $\vec{E}, \vec{P}$ y $\vec{D}$ en cada región del espacio.

e) Halle las densidades de carga de polarización volumétrica y superficial.

Sugerencia: recuerde que el potencial más general solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndrica, en el caso en que existe independencia de la coordenada z, tiene la forma:

$$\varphi(r, \theta) = E_0 + F_0 lnr + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta]$$

Ejercicio 2

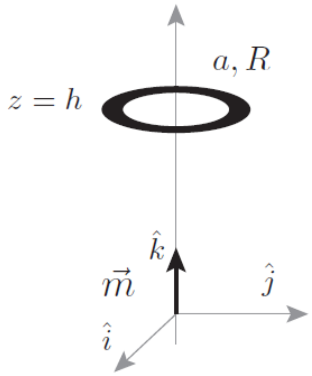
Considere un dipolo magnético puntual con momento dipolar $\vec{m} = (A(t - t_0) + B)\hat{k}$ ubicado en el origen de coordenadas.

a) Determine el campo magnético que genera dicho dipolo. Se sugiere utilizar coordenadas cilíndricas.

b) Si a una altura $z = h$ por encima del dipolo se fija una espira de radio a, y resistencia R, con su eje coincidente con $\hat{k}$ como muestra la figura. ¿Cuál es la corriente inducida en la misma?. Desprecie efectos de autoinducción.

c) Calcule la fuerza ejercida sobre la espira.

d) Considere que en el tiempo $t = t_0$ se suelta la espira. Explique hacia donde se mueve la espira inmediatamente después. Discuta en función de los parámetros A y B.



Sugerencia: Pueden ser útiles las siguientes integrales:

$$\int_0^r \frac{\rho}{(h^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} d\rho = -\frac{1}{3(h^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_0^r, \qquad \int_0^r \frac{\rho^3}{(h^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} d\rho = -\frac{2h^2+3\rho^2}{3(h^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_0^r$$

Ejercicio 3

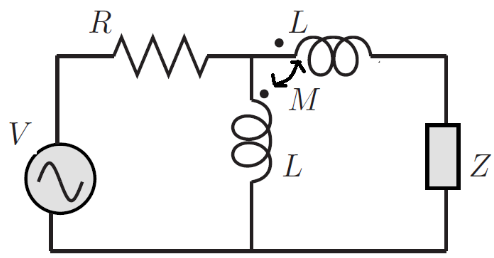
Considere el circuito eléctrico de la figura, que es alimentado por una fuente con $V(t) = V_0 \cos\omega t$ operando en régimen.

a) Calcule la impedancia equivalente vista por la fuente.

b) Para que la potencia media disipada sea nula:

   a. Muestre que si en Z es un capacitor, existe una frecuencia para la cual la potencia media disipada es nula.

   b. ¿Cuánto debe valer la capacitancia C para que la frecuencia anterior sea ω_0?.



c) Suponga que $L = M$. Calcule la corriente $I(t)$ que circula por la resistencia.

d) Calcule la potencia media disipada por el circuito en la condición c).