SOLUCIONES Examen Electromagnetismo

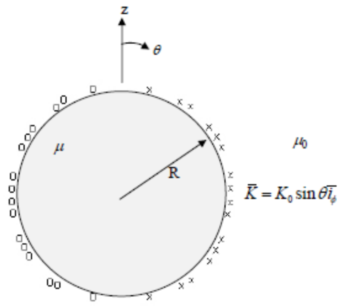
5 de Agosto de 2020

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería

Ejercicio 1.

Se coloca en la superficie de una esfera de radio R, una corriente superficial $K = K_0 sin\theta\ e_\phi$. El interior de la esfera tiene una permeabilidad magnética μ. La esfera se coloca en el vacío con permeabilidad magnética μ_0. No hay campo magnético en el infinito.

a) **Pruebe que existen φ_1^* y φ_2^* potencial escalar magnética, para las regiones $r < R$ y $r > R$ respectivamente, definido como $\vec{H}_1 = -\nabla\varphi_1^*$ y $\vec{H}_2 = -\nabla\varphi_2^*$. Pruebe además, que ambos verifican la ecuación de Laplace.**



Las ecuaciones que cumplen los campos son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{H} = J_T,$$

Tanto dentro como fuera de la esfera (exceptuando el borde) no existen corrientes transportadoras, entonces:

$$\nabla \times \vec{H}_1 = 0 \ \Rightarrow \ \ni \ \varphi_1^* : \vec{H}_1 = -\nabla\varphi_1^*$$

$$\nabla \times \vec{H}_2 = 0 \Rightarrow \ \ni \ \varphi_2^* : \ \vec{H}_2 = -\nabla\varphi_2^*$$

Dentro de la esfera magnética lineal se cumple: $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Fuera de la esfera magnética: $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$

Además, la divergencia del campo $\vec{B}$ es siempre nula y en ambas regiones $\vec{H}_i$ y $\vec{B}_i$ son proporcionales, por lo tanto los campos $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ cumplen $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_1 = 0 \ y\, \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_2 = 0$. Entonces ambos potenciales escalares magnéticos cumplen la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\varphi_1^* = 0$$

$$\nabla^2\varphi_2^* = 0$$

b) **¿Cuáles son las condiciones de borde en el campo magnético en $r = 0$ y, $r = R$?.**

En $r \to 0$ los campos no diverge. No existen campos en el infinito.

En $r = R$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \ B_{1r}|_{r=R} = B_{2r}|_{r=R}$$

$$\nabla \times \vec{H} = J_T \Rightarrow H_{2\theta}(R,\theta) - H_{1\theta}(R,\theta) = K_0 sin\theta$$

Estas condiciones expresadas en los potenciales quedan de la siguiente forma:

$$B_{1r} = B_{2r} \Rightarrow -\mu \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial r}\bigg|_R = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial r}\bigg|_R \ (CB1),$$

$$H_{2\theta} - H_{1\theta} = K_0 sin\theta \Rightarrow \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \theta}\right)\bigg|_R = -K_0 sin\theta \quad (CB2)$$

$$\varphi_2^*(r \to \infty) = cte_1 \quad (CB3), \ \ \varphi_1^*(r \to 0) = cte_2, (CB4)$$

a) Use las condiciones de borde de la parte b) y las soluciones a la ecuación de Laplace para determinar ambos potenciales escalares magnéticos.

Planteo las soluciones a Laplace en coordenadas esféricas hasta orden 1, si las mismas verifican todas las condiciones de borde por el teorema de unicidad, son la solución.

$$\varphi_1^*(r,\theta) = (A_1 r + C_1/r^2)cos\theta + \frac{D_1}{r}$$

$$\varphi_2^*(r,\theta) = \left(A_2 r + \frac{C_2}{r^2}\right)cos\theta + \frac{D_2}{r}$$

Los términos 1/r deben ser nulos para que no exista divergencia del campo magnético, es decir $D_1 = D_2 = 0$. Por otro lado C_1 es nulo para que no haya divergencias en el origen (CB4) y A_2 es nulo para que no haya divergencias en el infinito (CB3). Reduciendo los potenciales a:

$$\varphi_1^*(r,\theta) = (A_1 r)cos\theta \qquad \varphi_2^*(r,\theta) = \left(\frac{C_2}{r^2}\right)cos\theta$$

Aplicando las condiciones de borde CB1 y CB2, obtenemos las siguientes relaciones:

CB1 - $\mu \frac{\partial \varphi *_1}{\partial r}\Big|_R = \mu_0 \frac{\partial \varphi *_2}{\partial r}\Big|_R = \mu A_1 cos\theta = -2\frac{\mu_0 C_2 cos\theta}{R^3} \ \ \to C_2 = -R^3 A_1 \mu / 2\mu_0$

CB2 - $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \theta}\right)\Big|_R = -K_0 sin\theta = -\left(\frac{C_2}{R^3} - A_1\right)sin\theta \ \ \to \frac{C_2}{R^3} - A_1 = K_0$

$$-\frac{A_1 \mu}{2\mu_0} - A_1 = K_0 \ \to A_1 = -\frac{K_0 2\mu_0}{\mu + 2\mu_0}$$

$$C_2 = R^3 \frac{K_0 \mu}{\mu + 2\mu_0}$$

Los potenciales son:

$$\varphi_1^*(r,\theta) = -\frac{K_0 2\mu_0}{\mu + 2\mu_0} r cos\theta \qquad \varphi_2^*(r,\theta) = \frac{R^3}{r^2}\frac{K_0 \mu}{\mu + 2\mu_0} cos\theta$$

b) Calcule los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en todo el espacio.

$$\vec{H}_1 = -\nabla\varphi_1^* = \frac{K_0 2\mu_0}{\mu + 2\mu_0}\nabla r cos\theta = \frac{K_0 2\mu_0}{\mu + 2\mu_0}\nabla z = \frac{K_0 2\mu_0}{\mu + 2\mu_0}\hat{k}$$

$$\vec{H}_2 = -\nabla\varphi_2^* = -\frac{K_0\mu}{\mu + 2\mu_0}\nabla\frac{R^3}{r^2}cos\theta = \frac{K_0\mu}{\mu + 2\mu_0}\frac{R^3}{r^3}(2cos\theta e_r + sin\theta e_\theta)$$

Dentro de la esfera magnética: $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Fuera de la esfera magnética: $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$

c) En analogía al potencial escalar magnético para un dipolo magnético puntual, ¿cuál es el momento magnético efectivo de la esfera?

El potencial de un dipolo es:

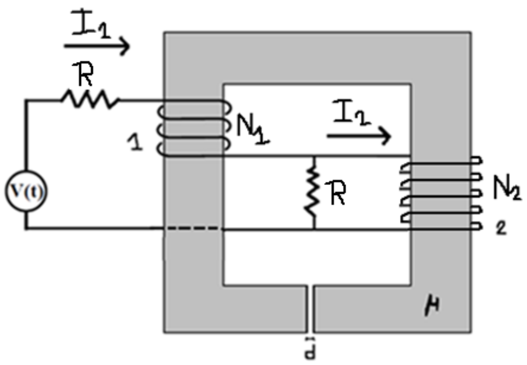
$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{mcos\theta}{r^2}$$

Comparando con la expresión del potencial en la región fuera de la esfera, obtenemos el momento magnético efectivo:

$$\frac{R^3}{r^2}\frac{K_0\mu}{\mu + 2\mu_0} = \frac{1}{4\pi}\frac{m_{ef}}{r^2} \rightarrow m_{ef} = \frac{4\pi R^3 K_0\mu}{\mu + 2\mu_0}$$

Ejercicio 2.

Considere el circuito de la figura, formado por un mismo núcleo magnético cuadrado, con permeabilidad $\mu \gg \mu_0$, de lado medio l y área de sección S. El núcleo presenta un pequeño entrehierro de tamaño d ($\ll l$). Los dos bobinados, con N_1 y $N_2 = 2N_1$ vueltas, se enrollan (como indica la figura) sobre el núcleo. El conjunto de bobinas y resistencias esta alimentado con una fuente $V(t) = V_0 cos\omega t$.



a) Determine la autoinductancia de cada bobina (L_1 y L_2) y la inductancia mutua M_{12}.

Para calcular la auto inductancia debemos calcular el flujo que atraviesa cada bobina.

$$\phi\mathcal{R}_{eq} = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{4l - d}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S} \sim \frac{4l}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S} = \frac{4l}{\mu S}\left(1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{d}{4l}\right)$$

$$\phi = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

El flujo total que pasa por la bobina 1 es:

$$\phi_{T1} = N_1 \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

El flujo total que pasa por la bobina 2 es:

$$\phi_{T2} = N_2 \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

Ahora podemos calcular las inductancias:

$$L_1 = \frac{d\phi_{T1}}{dI_1} = \frac{\mu S}{4l\left(1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{d}{4l}\right)} N_1^2, \qquad M_{12} = \frac{d\phi_{T2}}{dI_1} = \frac{\mu S}{4l\left(1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{d}{4l}\right)} N_1 N_2$$

$$L_2 = \frac{d\phi_{T2}}{dI_2} = \frac{\mu S}{4l\left(1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{d}{4l}\right)} N_2^2, \qquad M_{21} = \frac{d\phi_{T1}}{dI_2} = \frac{\mu S}{4l\left(1 + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{d}{4l}\right)} N_1 N_2$$

Se verifica que

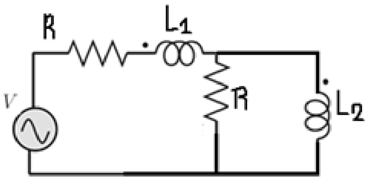
$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

Teniendo en cuenta la relación entre los N, tenemos $L_2 = 4L_1 \;\; y \; M = 2L_1$.

b) Calcule los campos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ en todo el circuito magnético (material y entrehierro), en función de las corrientes $\boldsymbol{I_1}$ e $\boldsymbol{I_2}$.

$$\phi = \frac{NI_1 + N_2 I_2}{\mathcal{R}_{eq}} \rightarrow B = \frac{\phi}{S}, \qquad H_d = \frac{B}{\mu_0}, \qquad H_{núcleo} = \frac{B}{\mu}$$

c) Dibuje el circuito eléctrico, con el sistema de puntos correspondiente para indicar el sentido de las mutuas.



d) Calcule la corriente que circula por la fuente.

Resolvemos el circuito eléctrico utilizando notación fasorial.

$$V_0 = RI_1 + \; i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 \; + RI_3 \; (1)$$

$$i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 - RI_3 = 0 \quad (2)$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \; \rightarrow I_3 = I_1 - I_2 \;\; (3)$$

Llamaremos a $L_1 = L$ y usaremos la relación entre las mutuas.

$$V_0 = I_1(2R + \; i\omega L) + I_2(-R + i\omega 2L) \; (1b)$$

$$i\omega 4LI_2 + i\omega 2LI_1 - R(I_1 - I_2) = I_1(i\omega 2L - R) + I_2(i\omega 4L + R) = 0 \quad (2b)$$

Despejamos de (2b) y sustituimos en (1 b)

$$I_2 = -\frac{I_1(i\omega 2L - R)}{(R + i\omega 4L)}$$

$$V_0 = I_1(2R + i\omega L) - \frac{I_1(i\omega 2L - R)}{(R + i\omega 4L)}(-R + i\omega 2L)$$
$$= I_1\left(\frac{(2R + i\omega L)(R + 4i\omega L) - (R - i\omega 2L)(R - i\omega 2L)}{(R + i\omega 4L)}\right)$$

$$I_1 = \frac{V_0(R + i\omega 4L)}{(2R + i\omega L)(R + 4i\omega L) - (R - i\omega 2L)(R - i\omega 2L)}$$

$$I_1 = \frac{V_0(R + i\omega 4L)}{2R^2 + 8Ri\omega L + i\omega LR - 4\omega^2 L^2 - R^2 + i4\omega LR + 4\omega^2 L^2}$$

$$I_1 = \frac{V_0(R + i\omega 4L)}{R^2 + 13Ri\omega L} = \frac{V_0}{R}\frac{(R + i\omega 4L)}{R + 13i\omega L}$$

Si llamamos $(R + i\omega 4L) = Z_1 = |Z_1|e^{i\theta_1}$ y $R + 13i\omega L = Z_2 = |Z_2|e^{i\theta_2}$

Entonces la corriente que pasa por la fuente es la parte real de:

$$I_1(t) = \frac{V_0|Z_1|}{R|Z_2|}\, e^{i(\omega t + \theta_1 - \theta_2)}$$

$$|Z_1| = \sqrt{R^2 + (\omega 4L)^2},\;\; \theta_1 = atrg(4\omega L/R)$$

$$|Z_2| = \sqrt{\sqrt{R^2 + (\omega 13L)^2}},\;\; \theta_2 = atrg(13\omega L/R)$$

La corriente que circula es:

$$i_1\,(t) = \frac{V_0\sqrt{R^2 + (\omega 4L)^2}}{R\sqrt{R^2 + (\omega 13L)^2}}\cos(\omega t + \theta_1 - \theta_2)$$

d) Halle la potencial media disipada en la resistencia R_2., necesitamos la corriente I_3

$$I_3 = I_1 - I_2 = I_1\left(1 + \frac{(i\omega 2L - R)}{(R + i\omega 4L)}\right) = \frac{V_0|Z_1|}{R|Z_2|}\, e^{i(\omega t + \theta_1 - \theta_2)}\left(\frac{i\omega(6L)}{R + i\omega 4L}\right)$$

La potencia media disipada se puede calcular como:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T I_R(t)V_R(t)dt = \frac{1}{2}Re(V_R^* I_R) = \frac{1}{2}Re(RI_R^* I_R) = \frac{1}{2}R|I_3|^2$$

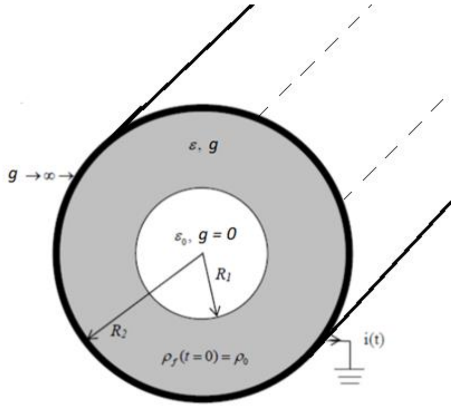
$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2(\,R^2 + (\omega 4L)^2)}{R(R^2 + (\omega 13L)^2)}\frac{((\omega L6)^2)}{(\,R^2 + (\omega 4L)^2)} = 18\frac{V_0^2((\omega L)^2)}{R(R^2 + (\omega 13L)^2)}$$

Ejercicio 3. Un cascaron cilíndrico dieléctrico con radio interno R_1 y radio externo R_2, tiene una pemitividad dieléctrica ε y una conductividad g, está cargado uniformemente en tiempo $t = 0$ con una densidad de carga libre $\rho_l(t = 0) = \rho_0$. La región interior al cascaron es vacío con permitividad ε_0 y conductividad nula. Asuma que la densidad de carga superficial en $r = R_1$ es cero para todo tiempo. La superficie a $r = R_2$ es un conductor perfecto conectado a tierra, de modo que el campo eléctrico para $r > R_2$ es nulo. El largo d del cilindro es lo suficientemente grande para poder despreciar efectos de borde.

a) **¿Cuál es el campo eléctrico en el hueco $r < R_1$?.**

Cero, no hay cargas y hay simetría cilíndrica que permite aplicar la ley de Gauss.

b) **Calcule la densidad de carga volumétrica, el campo eléctrico $\vec{E}$ y la densidad de corriente dentro del dieléctrico en función del espacio y el tiempo.**



Condiciones iniciales:

$$Gauss \quad E2\pi rL = \rho\pi(r^2 - R_1^2)L/\varepsilon \ \Rightarrow E = \rho\frac{(r^2 - R_1^2)}{\varepsilon 2r} \ \Rightarrow \vec{E} = \rho\frac{(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon r}\ \vec{e}_r$$

$$Lineal\, \vec{J} = g\vec{E} = g\ \rho\frac{(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon r}\vec{e}_r$$

Para hallar la evolución de la carga:

$$\vec{J} = g\vec{E}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \ \Rightarrow \ \nabla \cdot \vec{J} = g\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + g\frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \ \Rightarrow \rho(t) = \rho(0)e^{-tg/\varepsilon} = \rho_0 e^{-tg/\varepsilon}$$

Entonces, para hallar el campo en el interior en un instante intermedio vuelvo aplicar gauss con $\rho(t)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \rho_0 e^{-tg/\varepsilon}\frac{(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon r}\ \vec{e}_r$$

c) **Calcule la densidad superficial de carga en el conductor ($r = R_2$).**

El campo eléctrico afuera es nulo, así que la carga total encerrada debe ser cero:

$$Q = 0 = \rho_0 e^{-\frac{tg}{\varepsilon}}\pi(R_2^2 - R_1^2)L + \sigma(t)2\pi R_2 L$$

$$\sigma(t) = -\ \rho_0 e^{-\frac{tg}{\varepsilon}}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2}$$

Otra opción:

$$D_{2n} - D_{1n} = \ \sigma(t) = -D_{1n} = -\rho_0 e^{-\frac{tg}{\varepsilon}}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2}$$

d) **¿Cuál es la corriente a tierra $i(t)$?.**

Si tomamos una superficie gaussiana que sea atravesada por $i(t)$, como no hay campo, no hay J y por ende no hay $i(t)$. Es cero.