Solución Primer Parcial Electromagnetismo – Curso 2023

27 de setiembre de 2023

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería.

Problema 1.

a) El problema no involucra medios dieléctricos, y estamos en electrostática, podemos partir de las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_L/\varepsilon_0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

En ninguna de las dos regiones (tanto dentro como fuera del cascaron) existe ρ_L, por lo que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Como $\nabla \times \vec{E} = 0$, existe un potencial ϕ, tal que $\vec{E} = -\nabla\phi$. Y como $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, el potencial ϕ cumple la ecuación de Laplace: $\nabla^2\phi = 0$ para $r < R$, y $r > R$. Llamaremos a estos potenciales ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente.

b) Las condiciones de frontera son

a. El potencial $\phi_1(r,\theta)$ no puede divergir en el origen.
b. El potencial $\phi_2(r,\theta)$ no puede divergir cuando $r \to \infty$.
c. En el cascaron (frontera entre los medios) el potencial debe ser continuo $\phi_2(R,\theta) = \phi_1(R,\theta)$.
d. En el cascaron, la componente normal del campo eléctrico tiene una discontinuidad proporcional a la densidad de carga libre superficial.

En $r = R$

$$E_{2r} - E_{1r} = \frac{\sigma_0 cos\theta}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right|_{r=R} + \left.\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\sigma_0 cos\theta}{\varepsilon_0}$$

Esta condición se deduce de aplicar gauss sobre la frontera, es una pastilla cilíndrica, por ejemplo, cuyo alto tienda a cero.

c.i) El problema tiene simetría esférica de revolución, por lo cual la solución general a la ecuación de la Laplace puede ser escrita como:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(cos\theta)(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})$$

La letra del problema sugiere truncar la serie en $n = 1$, e imponer las condiciones de frontera. Aplicando el teorema de unicidad para la solución de la ecuación de Laplace, podemos asegurar que ése es el potencial del problema, a menos de una constante aditiva. Además, la sugerencia de cortar hasta $n = 1$ parece acorde con la configuración de carga y las condiciones de borde del problema.

Entonces proponemos las siguientes expresiones para los potenciales en los medios (1) ($r < R$) y (2) ($r > R$).

$$\phi_1(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2}\right)cos\theta \quad ,r < R$$

$$\phi_2(r,\theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2}\right)cos\theta \quad ,r > R$$

Aplicando la condición de borde a. se observa que $B_0 = B_1 = 0$, sino el potencial diverge en el origen. De la condición b. se obtiene que $C_1 = 0$ porque sino diverge en el infinito. Con esto, ambos potenciales han sido simplificados:

$$\phi_1(r,\theta) = A_0 + A_1 r cos\theta \quad r < R$$

$$\phi_2(r,\theta) = C_0 + \frac{D_0}{r} + \frac{D_1}{r^2}cos\theta \quad r > R$$

Ahora apliquemos c. (continuidad):

$$\phi_1(R,\theta) = A_0 + A_1 R cos\theta = C_0 + \frac{D_0}{R} + \frac{D_1}{R^2}cos\theta = \phi_2(R,\theta)$$

$$A_0 - \left(C_0 + \frac{D_0}{R}\right)1 + \left(A_1 R - \frac{D_1}{R^2}\right)cos\theta = 0$$

$$\left[A_0 - \left(C_0 + \frac{D_0}{R}\right)\right]P_0 + \left(A_1 R - \frac{D_1}{R^2}\right)P_1 = 0$$

Como los polinomios de Legendre son ortogonales, tenemos que cada termino que los multiplica en las igualdades anteriores debe ser nulo.

$$A_0 - \left(C_0 + \frac{D_0}{R}\right) = 0 \rightarrow A_0 = C_0 + \frac{D_0}{R} \quad (1)$$

$$A_1 R - \frac{D_1}{R^2} = 0 \rightarrow A_1 = \frac{D_1}{R^3} \quad (2)$$

Solo resta aplicar la condición d.

$$-\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right|_r + \left.\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right|_R = \frac{\sigma_0 cos\theta}{\varepsilon_0}$$

$$A_1 cos\theta - \left(-\frac{D_0}{R^2} - 2\frac{D_1}{R^3}cos\theta\right) = \frac{\sigma_0 cos\theta}{\varepsilon_0}$$

Nuevamente agrupando en P_0 y P_1 obtenemos las condiciones

$$D_0 = 0 \quad (3)$$

$$A_1 + \frac{2D_1}{R^3} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \ (4)$$

La condición (3) se podía establecer previamente notando que no hay carga neta en el cascaron (integrando la densidad de carga) y por ende el termino 1/r no debía aparecer en el potencial.

Uniendo (1), (2), (3) y (4) tenemos que $A_0 = C_0$ y $\frac{3D_1}{R^3} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, $D_1 = \frac{R^3\sigma_0}{3\varepsilon_0}$, $A_1 = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$

Entonces los potenciales quedan:

$$\phi_1(r,\theta) = A_0 + \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} r cos\theta \quad r < R$$

$$\phi_2(r,\theta) = A_0 + \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} cos\theta \quad r > R$$

Como, los potenciales cumplen la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera, por el teorema de unicidad de la solución, son las soluciones al problema. A_0 resulta una constante indeterminada, por lo que podríamos tomarla como cero sin problemas.

c.ii) El potencial de un dipolo según el eje z, $\vec{p} = p\hat{z}$, toma la forma:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2} cos\theta$$

Entonces podemos identificar que $\vec{p} = \frac{4\pi R^3}{3}\sigma_0\hat{z}$.

También se podría calcular como:

$$\vec{p} = \int \sigma_0 cos\theta \vec{r} dS = 2\pi \int \sigma_0 sin\theta R^3 \cos^2\theta \, d\theta \hat{z} = \frac{4\pi\sigma_0 R^3}{3}\hat{z}$$

$$\int sin\theta \cos^2\theta \, d\theta = -\int_1^{-1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

d) Para calcular el campo eléctrico debemos tomar el gradiente del potencial calculado para cada región:

$$\vec{E}_1 = -\nabla\phi_1 = -\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\hat{e}_\theta = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} cos\theta\hat{e}_r + \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} sin\theta\hat{e}_\theta = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla\phi_2 = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3} cos\theta\hat{e}_r + \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3} sin\theta\hat{e}_\theta = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}(3cos\theta\hat{e}_r - \hat{z})$$

Afuera del cascaron se recupera el campo de un dipolo.

Problema 2.

a.i) Por simetría, como ambas placas son mantenidas a un potencial fijo, el campo eléctrico debe ser radial e igual en ambos sectores (con y sin dieléctrico). Si se plantea que los campos radiales sean diferentes según los sectores, como las componentes tangenciales de los campos eléctricos deben ser iguales en la frontera dieléctrico-vacío (en el ángulo $\theta = \beta$), se llega a que son iguales en todo el espacio entre las placas.

Entonces se propone un único campo eléctrico de la forma:

$$\vec{E} = \frac{A}{r}\hat{e}_r$$

este campo se puede deducir a partir de la ecuación de Laplace con simetría de revolución en coordenadas cilíndricas: $\nabla^2\phi(r) = 0$ con $\vec{E} = -\nabla\phi$:

Hallamos la contante A, evaluando la diferencia de potencial entre las placas:

$$\phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -Aln\left(\frac{b}{a}\right) = -V_0 \rightarrow A = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Entonces,

$$\vec{E} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r$$

Alternativamente, también puede deducirse el campo radial, a partir de la ley de Gauss, llegando al mismo resultado.

En la zona con dieléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \frac{\varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r, \qquad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r$$

En la zona sin dieléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\hat{e}_r, \ \ \vec{P} = 0$$

Fuera del condensador los campos son nulos.

a.ii) La densidad de polarización volumétrica es cero, porque la divergencia de ese tipo de expresión da cero ($\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$).

Las densidades de carga de polarización y libre son las siguientes:

En la zona del dieléctrico, con el ángulo θ entre *0* y β.

$$\sigma_{p1}(r = a) = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=a} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a} \ \ pues\ \hat{n} = -\hat{e}_r, \sigma_{L1}(r = a) = \vec{D}\cdot\hat{e}_r\Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a}$$

$\sigma_{p1}(r=b) = \vec{P}\cdot\hat{n}\big|_{r=b} = +\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{b}$ $pues\ \hat{n} = \hat{e}_r$, $\sigma_{L1}(r=b) = \vec{D}\cdot -\hat{e}_r\big|_{r=b} = -\frac{\varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{b}$

En la zona donde no hay dieléctrico, ángulo θ entre β y π:

$\sigma_{p2}(r=a) = 0$, $\sigma_{L2}(r=a) = \vec{D}\cdot\hat{e}_r = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a}$

$\sigma_{p2}(r=b) = 0$, $\sigma_{L2}(r=b) = \vec{D}\cdot -\hat{e}_r = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{b}$

Se observa que la densidad superficial de carga total (libre mas polarización) es uniforme en cada placa: $\sigma_{p1}\big|_{r=a} + \sigma_{L1}|_{r=a} = \sigma_{L2}|_{r=a}$, (y análogamente para $r = b$), lo que justifica un único campo eléctrico radial para ambas zonas (con o sin dieléctrico).

b) Para calcular la capacidad del sistema, podemos integrar las densidades superficiales de carga libre en una de las placas y hallar la carga total *Q* en ella y luego, usar que *Q=CV₀* para determinar *C*. Si consideramos la placa en $r = a$:

$$Q = \int \sigma_{L1} da_1 + \int \sigma_{L2} da_2 = \frac{\varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a}A_1 + \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{a}A_2,$$

$$Con\ A_1 = \beta L a,\ \ A_2 = (\pi-\beta)La$$

$$Q = \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(\varepsilon_0(\pi-\beta)+\beta\varepsilon)V_0$$

Entonces la capacidad resulta: $C = \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(\varepsilon_0(\pi-\beta)+\beta\varepsilon)$

Otra forma alternativa, es notar que se trata de dos capacitores en paralelo donde $C_{equivalente}=C_1+C_2$ y que una capacidad genérica de un sector de cilindros de ángulo α y permitividad ε^* está dada por $\frac{L\varepsilon^*\alpha}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$.

c) Podemos calcular la energía a partir de la capacidad como:

$$U = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}(\varepsilon_0(\pi-\beta)+\beta\varepsilon)V_0^2$$

También se puede calcular la energía a partir de integrar la densidad de energía en el volumen del condensador:

$$u_E = \begin{cases} \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\right)^2 & vacio, \beta < \theta < \pi \\ \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r}\right)^2 & dielectríco, 0 < \theta < \beta \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2 \int \frac{1}{r^2} r dr d\theta dz + \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2 \int \frac{1}{r^2} r dr d\theta dz$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) L(\ \pi - \beta) + \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) L(\ \beta)$$

$$U = \frac{L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)} (\varepsilon_0(\ \pi - \beta) + \beta\varepsilon) V_0^2$$

Efectivamente, resulta igual al cálculo anterior a partir de la capacidad.

d) Calculamos el momento, como el sistema se mantiene a potencial constante:

$$\vec{\tau}_O = \left.\frac{dU}{d\beta}\right|_{V_o} \hat{k} = \frac{L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)} V_0^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)\hat{k}$$

La dirección es la correspondiente a la regla de la mano derecha con β creciendo, es decir saliente a la hoja, según $\hat{k}$.