Soluciones

Examen Electromagnetismo - Diciembre

Ejercicio 1

Usamos Gauss en el dieléctrico para obtener $\vec{D}$, con $\vec{D}$ calculamos $\vec{E}$, y usando que la diferencia de potencial es V_0, podemos determinar las constantes restantes. Supongamos que la placa inferior esta a V_0 y la superior a cero. Entonces,

$$\vec{D} = \sigma\hat{k}, \quad \sigma = cte$$

Entonces, $\vec{D} = \varepsilon(z)\vec{E} \to \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon(z)}\hat{k}$, para hallar σ usamos:

$$\varphi(a) - \varphi(0) = -\int_0^a \vec{E}\cdot d\vec{z} = -\int_0^a \frac{\sigma}{\varepsilon(z)}dz = -\int_0^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0(1+z/a)}dz$$

$$V_0 = \int_0^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0(1+z/a)}dz = \frac{\sigma\ln((1+z/a))}{\frac{\varepsilon_0}{a}}\Bigg|_0^a = \frac{\sigma a}{(\varepsilon_0)}\ln(2)$$

$$\sigma = \frac{V_0\varepsilon_0}{a\ln(2)}$$

Entonces:

$$\vec{D} = \frac{V_0\varepsilon_0}{a\ln(2)}\hat{k}, \quad \vec{E} = \frac{V_0}{a\ln(2)}\frac{1}{(1+z/a)}\hat{k}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \sigma\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0\left(1+\frac{z}{a}\right)}\right) = \frac{V_0\varepsilon_0}{a\ln(2)}\frac{z/a}{\left(1+\frac{z}{a}\right)}\ \hat{k}$$

b)

$$\sigma_p(z=0) = \vec{P}\cdot -\hat{k} = 0, \qquad \sigma_p(z=a) = \vec{P}\cdot\hat{k} = \frac{V_0\varepsilon_0}{a\ln(2)}\frac{1}{(2)}$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = +\frac{\partial\left[-\frac{\sigma}{\left(1+\frac{z}{a}\right)}\right]}{\partial z} = -\frac{\sigma}{a\left(1+\frac{z}{a}\right)^2}$$

c)

$$U = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}dV = \frac{1}{2}\sigma^2 A\int\frac{1}{\varepsilon(z)}dz = \frac{1}{2}\sigma^2 A\frac{a}{\varepsilon_0}\ln(2)$$

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_0 \varepsilon_0}{a\ln(2)}\right)^2 A\frac{a}{\varepsilon_0}\ln(2) = \frac{1}{2}\frac{AV_0^2\varepsilon_0}{a\ln(2)}$$

$$C_{eq} = \frac{A\varepsilon_0}{a\ln(2)}$$

Ejercicio 2

a) Partiendo de:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = J_T, \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

En la región 1 no hay corrientes trasportadores ($J_T = 0$) por lo que $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$, además el medio es lineal, entonces $\vec{B}$ y $\vec{H}$ son proporcionales, y con ello la $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$. Por ende existe un potencial y su Laplaciano es cero.
En la región dos, sigue siendo $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$, entonces existe el potencial. Y como $\vec{M}$ es uniforme su divergencia es nula, al igual que la divergencia de $\vec{B}$ entonces $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$. En la región 3 pasa lo mismo que en la 1 ya que el vacío es un medio lineal.

b) La solución es en coordenadas cilíndricas y tiene simetría según z. Los términos $ln(r)$ no pueden aparecer ya que darían lugar a campos con divergencia no nula. Además no se tomarán en cuenta las constantes aditivas ya que no pueden ser determinadas y no afectan a los campos.

En el origen el potencial debe ser regular, ya que nada sugiere un comportamiento no regular en el origen $\varphi_1(r\to 0)\to cte_1$. En r $r\to\infty$, el potencial debe tender a una constante $\varphi_3(r\to\infty)\to cte_3$.

En $r = a$,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow B_{1r} = B_{2r} \Rightarrow -\mu_0\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_a = -\mu_0\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_a + \mu_0 M_0 cos\theta \ \ (CB3),$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \Rightarrow \ H_{2t} = H_{1t}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\right|_a = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right|_a \quad (CB4)$$

En $r = 2a$,

$$-\mu_0\left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\right|_{2a} = -\mu_0\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{2a} + \mu_0 M_0 cos\theta$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}\right|_{2a} = \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right|_{2a}$$

c)

Teniendo en cuenta las condiciones de borde y que solo dependen de $cos\theta$, me quedo en los tres casos hasta $n = 1$ en el desarrollo, únicamente con los términos en $cos\theta$. Además impuse las condiciones en cero e infinito eliminando los términos que divergen en cada caso.

$$\varphi_1(r,\theta) = A_1 r cos\theta, \qquad \varphi_2(r,\theta) = \left(A_2 r + \frac{B_2}{r}\right) cos\theta, \;\; \varphi_3(r,\theta) = \frac{B_3}{r} cos\theta$$

$$r \;=\; a \rightarrow \;\; A_1 = A_2 + \frac{B_2}{a^2}, \qquad -A_1 = -\left(A_2 - \frac{B_2}{a^2}\right) + M_0$$

$$r \;=\; 2a \rightarrow \;\; \frac{B_3}{b^2} = A_2 + \frac{B_2}{b^2}, \qquad \frac{B_3}{b^2} = -\left(A_2 - \frac{B_2}{b^2}\right) + M_0$$

Tenemos que:

$$\frac{B_3}{4a^2} = A_1 - \frac{B_2}{a^2} + \frac{B_2}{4a^2} = A_1 - \frac{3B_2}{4a^2}$$

$$A_1 = \left(A_2 - \frac{B_2}{a^2}\right) - M_0 \rightarrow A_1 = \left(A_1 - \frac{B_2}{a^2} - \frac{B_2}{a^2}\right) - M_0 \rightarrow -M_0 - \frac{2B_2}{a^2} = 0$$

$$M_0 = -\frac{2B_2}{a^2} \rightarrow B_2 = -M_0 a^2/2$$

$$A_1 = A_2 - M_0/2$$

$$\frac{B_3}{4a^2} = A_2 + \frac{B_2}{4a^2} = A_2 - \frac{M_0}{8}$$

$$\frac{B_3}{4a^2} = -\left(A_2 - \frac{B_2}{4a^2}\right) + M_0 = -A_2 - \frac{M_0}{8} + M_0 = -A_2 + \frac{7}{8}M_0$$

$$0 = 2A_2 - M_0 \rightarrow A_2 = M_0/2$$

$$A_1 = 0, \qquad B_3 = \frac{3}{2} M_0 a^2$$

Entonces

$$\varphi_1(r,\theta) = A_1 r cos\theta = 0 \rightarrow \vec{B}_1 = 0 \; y \; \vec{H}_1 = 0$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \frac{M_0}{2}\left(r - \frac{a^2}{r}\right) cos\theta \rightarrow \vec{H}_2 = -\frac{M_0}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) cos\theta \hat{e}_r + \frac{M_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) sin\theta \hat{e}_\theta$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0(\vec{H}_2 + M_0 \hat{\imath}) = \frac{\mu_0 M_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) cos\theta \hat{e}_r - \frac{\mu_0 M_0}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) sin\theta \hat{e}_\theta$$

$$\vec{M} = M_0 \hat{\imath}$$

$$\varphi_3(r,\theta) = \frac{3}{2} M_0 \frac{a^2}{r} cos\theta, \qquad \vec{H}_3 = \frac{3}{2} M_0 \frac{a^2}{r^2} cos\theta \hat{e}_r + \frac{3}{2} M_0 \frac{a^2}{r^2} sin\theta \hat{e}_\theta \quad \vec{B}_3 = \mu_0 \vec{H}_3$$

c) $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0, \vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = \vec{M} \times (\pm \hat{e}_r) = \pm M_0 sin\theta$
El + indica $r \;=\; 2a$ y el menos $r \;=\; a$.

Ejercicio 3

a) Tomando los flujos ϕ_1 por la rama con N_1, ϕ_2 con N_2 (en sentido antihorario) y ϕ_3 por la rama central (hacia abajo), tenemos

$$\phi_1 = \phi_3 + \phi_2$$

Usando la ley de Ampere en distintas mallas.

$$\frac{\phi_1 \pi R}{\mu_1 S} + \frac{\phi_3 2R}{\mu_2 S} = N_1 I_1 \ \ (1) \rightarrow \frac{\phi_1 \pi R}{\mu_1 S} + \frac{(\phi_1 - \phi_2) 2R}{\mu_2 S} = N_1 I_1$$

$$\frac{\phi_1 \pi R}{\mu_1 S} + \frac{\phi_2 \pi R}{\mu_1 S} = N_1 I_1 + N_2 I_2 \ \ (2)$$

$$\frac{2\phi_1 \pi R}{\mu_1 S} - \frac{\phi_2 2R}{\mu_2 S} = N_1 I_1 \ \ (1')$$

Sumando (2)+(1')

$$\frac{3\phi_1 \pi R}{\mu_1 S} = 2N_1 I_1 + N_2 I_2 \rightarrow \phi_1 = \frac{\mu_1 S}{3\pi R}(2N_1 I_1 + N_2 I_2)$$

$$2\phi_1 - \phi_2 = \frac{\mu_1 S}{\pi R} N_1 I_1 \rightarrow \phi_2 = \frac{2\mu_1 S}{3\pi R}(2N_1 I_2 + N_2 I_2) - \frac{\mu_1 S}{\pi R} N_1 I_1$$

$$\phi_2 = \frac{2\mu_1 S}{3\pi R}(2N_1 I_2 + N_2 I_2) - \frac{\mu_1 S}{\pi R} N_1 I_1 \rightarrow \phi_2 = \frac{\mu_1 S}{\pi R}\left(\frac{N_1 I_1}{3} + \frac{2}{3} N_2 I_2\right)$$

Para hallar $L_1, L_2 \ y \ M_{12}$, calculamos los flujos totales por cada bobina:

$$\phi_{1T} = N_1 \phi_1 = \frac{\mu_1 S}{3\pi R} N_1 (2N_1 I_1 + N_2 I_2) \rightarrow L_1 = \frac{d\phi_{1T}}{dI_1} = \frac{2\mu_1 S}{3\pi R} N_1^2, M_{12} = \frac{d\phi_{1T}}{dI_2} = \frac{\mu_1 S}{3\pi R} N_1 N_2$$

$$\phi_{2T} = N_2 \phi_2 = \frac{\mu_1 S}{3\pi R} N_2 (2N_2 I_2 + N_1 I_1) \rightarrow L_2 = \frac{d\phi_{2T}}{d2} = \frac{2\mu_1 S}{3\pi R} N_2^2, M_{21} = \frac{d\phi_{2T}}{dI_1} = \frac{\mu_1 S}{3\pi R} N_1 N_2$$

b. El circuito corresponde a casi un RLC en serie, con un $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M = \frac{2\mu_1 S}{3\pi R}(N_2^2 + N_1^2 + N_1 N_2)$$

c. La impedancia equivalente total es:

$$Z_T = R + i\left(\omega L_{eq} - \frac{1}{\omega C}\right) \rightarrow$$

$$|Z_T| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_{eq} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \theta = artg\left(\frac{\left(\omega L_{eq} - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right)$$

d. La corriente fasorial es $\tilde{I} = \frac{V_0}{|Z_T|} e^{i(\omega t - \theta)}$

La corriente real es: $I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L_{eq}-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cos(\omega t - \theta)$

e. La potencia media disipada es $P = \frac{1}{2}Re(V\tilde{I}^*)$ o $P = \frac{1}{T}\int_0^T RI^2 dt$

$$P = \frac{1}{2}\frac{RV_0^2}{R^2 + \left(\omega L_{eq} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

La frecuencia que maximiza la potencia disipada, es la misma que maximiza la corriente por la resistencia, y vale

$$\omega L_{eq} - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL_{eq}}}$$

f. Para duplicar ω_0 solo modificando el circuito magnético, debemos disminuir $L'_{eq} = \frac{L_{eq}}{4}$. Esto lo podemos hacer de muchas formas:

$$\frac{2\mu_1 S}{3\pi R}(N_2^2 + N_1^2 + N_1 N_2)$$

Podemos aumentar el radio del circuito magnético por 4, o disminuir su área en un factor 4. Cambiar el núcleo magnético a un material que tenga $\mu_1/4$. Hacer un cambio con las $N_1\ y\ N_2$, por ejemplo resolviendo la siguiente ecuación de segundo grado N_2' en función de N_2 y N_1.

$$N'^2_2 + N_1^2 + N_1 N'_2 = 4(N_2^2 + N_1^2 + N_1 N_2)$$