SOLUCIONES - Segundo Parcial Electromagnetismo

29/11/2019

1. Circuito magnético

a. Calculo del flujo magnético.

$$\Phi R_{eq} = NI \Rightarrow \; R_{eq} = \frac{2l}{\mu_a S} + \frac{2l}{\mu_b S} + \frac{2x}{S\mu_0} = \frac{2l}{\mu_b S}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right) = \frac{2l}{\mu_b S}\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_b S \mathrm{NI}}{2l\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)}$$

b. Calculo de la autoinductancia. El flujo total que pasa por la bobina es $\mathrm{N}\Phi$, la autoinductancia se define como:

$$L = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{N}\Phi)}{dI} = \frac{\mu_b S \mathrm{N}^2}{2l\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)}$$

c. Como el flujo es único, el campo magnético también lo es, ósea que:

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_b \mathrm{NI}}{2l\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)}$$

$$H_{entrehierro} = \frac{B}{\mu_0}, \;\; H_a = \frac{B}{\mu_a}, H_b = \frac{B}{\mu_b}$$

$$H_{entrehierro} = \frac{\mu_b \mathrm{NI}}{2l\mu_0\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)}, \;\; H_a = \frac{\mathrm{NI}}{4l\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)}, H_b = \frac{\mathrm{NI}}{2l\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)}$$

d. Debemos igual la fuerza del resorte a la fuerza magnética. Para ello calculamos primero la energía magnética:

$$U = \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}dV = \frac{1}{2}B^2\left(\frac{1}{\mu_0}2xS + \left(\frac{1}{\mu_a} + \frac{1}{\mu_b}\right)2lS\right) = B^2 S\left(\frac{1}{\mu_0}x + \frac{3}{2}\frac{l}{\mu_b}\right)$$

$$U = B^2 S\frac{l}{\mu_b}\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right) = \left[\frac{\mu_b \mathrm{NI}}{2l\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)}\right]^2 S\frac{l}{\mu_b}\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right) = \frac{\mu_b \mathrm{N}^2\mathrm{I}^2 S}{4l\left(\frac{3}{2} + \frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)} = \frac{1}{2}LI^2$$

También podríamos haber usado que la energía en el inductor es $\frac{1}{2}LI^2$

Calculo la fuerza magnética como $\vec{F} = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}(-\hat{\imath})$, $(-\hat{\imath})$ indica la dirección en la que crece x.

$$\vec{F}=\frac{\mu_b \mathrm{N}^2\mathrm{I}^2 S}{4l\left(\frac{3}{2}+\frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)^2}\frac{\mu_b}{l\mu_0}\hat{\imath}\rightarrow\vec{F}+\vec{F}_r=0\rightarrow\frac{\mu_b \mathrm{N}^2\mathrm{I}^2 S}{4l\left(\frac{3}{2}+\frac{x\mu_b}{l\mu_0}\right)^2}\frac{\mu_b}{l\mu_0}=\frac{Kl}{9}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu_b^2\mathrm{N}^2\mathrm{I}^2 S}{l^3 K\mu_0}}=\frac{3}{2}+\frac{x\mu_b}{l\mu_0}\rightarrow x=\frac{3l\mu_0}{2\mu_b}\left(\sqrt{\frac{S}{lK\mu_0}}\frac{NI\mu_b}{l}-1\right)$$

2. Circuito eléctrico

El circuito de la figura es alimentado por una fuente de voltaje $V_0 cos\omega t = Re(V_0 e^{i\omega t})$.

a) Encuentre la impedancia equivalente de la región punteada.

$$V_0-\frac{1}{i\omega C}I-RI=V^*=Z_{eq}I$$

$$V^*=i\omega LI-i\omega MI_1+i\omega LI_1-i\omega MI \quad (1)$$

$$V^*=i\omega LI-i\omega MI_1+\frac{1}{i\omega C}I_2 \quad (2)$$

$$I=I_1+I_2 \quad (3)$$

$$V^*=i\omega(L-M)I+i\omega(-M+L)I_1$$

$$V^*=i\omega LI-i\omega MI_1+\frac{1}{i\omega C}(I-I_1)=I\left(i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\right)+\left(-i\omega M-\frac{1}{i\omega C}\right)I_1$$

$$\frac{V^*}{i\omega(-M+L)}-I=I_1 \quad \rightarrow V^*=I\left(i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\right)+\left(-i\omega M-\frac{1}{i\omega C}\right)\left(\frac{V^*}{i\omega(-M+L)}-I\right)$$

$$V^*=iI\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)+i\left(-\omega M+\frac{1}{\omega C}\right)\left(\frac{V^*}{i\omega(-M+L)}-I\right)$$

$$V^*-\left(-\omega M+\frac{1}{\omega C}\right)\left(\frac{V^*}{\omega(-M+L)}\right)=iI\left(\omega(L+M)-\frac{2}{\omega C}\right)$$

$$V^*\left(1-\left(\frac{-\omega M+\frac{1}{\omega C}}{\omega(-M+L)}\right)\right)=iI\left(\omega(L+M)-\frac{2}{\omega C}\right)\rightarrow\ V^*=\frac{i\omega(L-M)\left(\omega(L+M)-\frac{2}{\omega C}\right)}{\omega(L-M)+\omega M+\frac{1}{\omega C}}I$$

$$V^*=\frac{i\omega(L-M)\left(\omega(L+M)-\frac{2}{\omega C}\right)}{\omega L-\frac{1}{\omega C}}I$$

$$Z_{eq}=\frac{i\omega(L-M)\left(\omega(L+M)-\frac{2}{\omega C}\right)}{\omega L-\frac{1}{\omega C}}$$

b) Para que la potencia disipada sea nula, la corriente por la resistencia debe serlo, es decir:

$$V_0 = \frac{1}{i\omega C} I + RI + Z_{eq} I = \left[R + \left(\frac{\omega(L-M)\left(\omega(L+M) - \frac{2}{\omega C}\right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} - \frac{1}{\omega C} \right) i \right] I$$

Para que la corriente sea nula tengo dos opciones:

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = 0, \qquad \omega = 0$$

c) Como se ve en la expresión hallada en a) si $M = L, Z_{eq} = 0$. Para lograr esto debo enrollar ambos bobinados sobre un único núcleo magnético (cuadrado o toroidal) con una permeabilidad magnética $\mu \gg \mu_0$ para evitar perdida de flujo, y asegurarme de que todo el flujo que pase por un bobinado pase por el otro. Bajo esa condición la inductancia mutua verifica $M = \sqrt{L_1 L_2} = L$. Vale destacar que ambas bobinas deben tener la misma cantidad de vuelta para satisfacer además que $L_1 = L_2$

d) En la condición anterior el circuito es equivalente a un RC en serie.

$$V_0 = \frac{1}{i\omega C} I_0 + RI_0 = I_0 \left(R - \frac{i}{\omega C} \right) \rightarrow I_0 = \frac{V_0}{Z_0}$$

$$Z_0 = \left(R - \frac{i}{\omega C} \right) = \sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}\, e^{i\theta}, \qquad \theta = artg(-1/R\omega C)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} e^{-i\theta} \rightarrow I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} e^{i(\omega t - \theta)}$$

Para tener la corriente $I(t)$ debemos tomar la parte real:

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} \cos(\omega t - \theta)$$

3. Cable coaxial

a. El campo magnético es el de un cable, y el campo eléctrico el de un capacitor.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\theta, \ \ \vec{E} = \frac{A}{r} \hat{e}_r \ con \ \varphi(b) - \varphi(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot dr = -A ln\left(\frac{b}{a}\right) = -V$$

$$\vec{E} = \frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right) r} \hat{e}_r$$

b. La energía acumula es integrar la densidad de energía electromagnética en la región del cable coaxial

$$u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I^2}{8(\pi r)^2}$$

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right) r} \right)^2$$

$$u_{EM} = \frac{\mu_0 I^2}{8(\pi r)^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right)r}\right)^2$$

$$U = \int\left[\frac{\mu_0 I^2}{8(\pi r)^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right)r}\right)^2\right] rdrd\theta dz = 2\pi L\left[\frac{\mu_0 I^2}{8(\pi)^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2\right]\int_a^b \frac{1}{r^2} rdr$$

$$= 2\pi L ln\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\mu_0 I^2}{8(\pi)^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2\right]$$

Además $V = RI$

c)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right)r}\hat{e}_r \times \frac{I}{2\pi r}\hat{e}_\theta = \frac{IV}{2\pi ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r^2}\hat{k}$$

d) El flujo es:

$$\int \vec{S}\cdot\hat{k}\, rdrd\theta = \int \frac{\mu_0 IV}{2\pi ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{1}{r^2} rdrd\theta = \frac{IV}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ln\left(\frac{r_0}{a}\right)$$

El flujo es en el sentido $\hat{k}$, definido según la dirección de la corriente en el cable interior, entonces el flujo es positivo en la dirección de $\hat{k}$.

e) Cuando $r_0 = b$ el flujo de $\vec{S}$ es IV, y como $V = RI$, el flujo de dicho vector es igual a la potencia disipada.

f) Si la batería se conecta en sentido contrario el problema es igual, el campo eléctrico es entrante y el campo magnético en según $-e_\theta$, y el $\vec{S}$ es en la misma dirección, sigue cumpliendo la misma relación energética. No importa el sentido de la conexión las perdidas por Joules deben ser compensada por el flujo de los campos hacia la región de perdida.