Examen Electromagnetismo

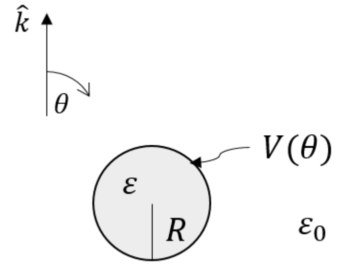
27 de Julio de 2021

Instituto de Física – Facultad de Ingeniería

- Se deberá comunicar claramente los razonamientos realizados. Las respuestas correctas que no incluyan una correcta justificación, serán consideradas como incompletas.
- Se debe poner el nombre en todas las hojas.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Ejercicio 1.

El potencial en la superficie de una esfera maciza dieléctrica lineal de permitividad ε y radio R está dado por $V(\theta) = k_1\, cos(\theta) + k_2 cos(2\theta)$, siendo k_1 y k_2 constantes. Considere que el potencial en el infinito es cero. La esfera se coloca en el vacío.



a. Escriba el potencial $V(\theta)$ en término de los polinomios de Legendre.

b. Halle el potencial eléctrico en todo el espacio.

   (Nota: Puede considerar de la solución completa, solo los términos que contengan los polinomios de Legendre que aparecen en V_0, pero debe justificar la validez del resultado final.)

c. Halle la densidad superficial de carga en la esfera (Libre y de Polarización).

d. ¿Cuál es la carga neta de la esfera?

e. ¿Cuál es el momento dipolar de la esfera?

Sugerencias:

La siguiente relación puede ser muy útil $\boldsymbol{cos^2(x)} = \frac{\boldsymbol{cos(2x)+1}}{\boldsymbol{2}}$

Recuerde que el potencial más general solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, en el caso en que existe independencia de la coordenada ϕ, tiene la forma:

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)\right],$$

$$P_0(\cos\theta) = 1, P_1(\cos\theta) = \cos\theta\,, P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\,...$$

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta) sin\,\theta\, d\theta = \frac{\delta_{nm}}{n+1/2}$$

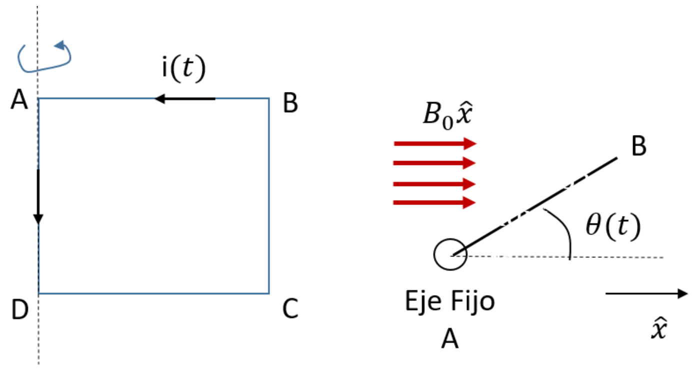
Ejercicio 2.

Un cilindro de radio R e infinitamente largo tiene una magnetización permanente $\vec{M} = kr\hat{z}$, donde $\hat{z}$ apunta en la dirección del eje z, r es la distancia al eje z, y k es una constante. No hay corrientes de transporte (libres) en el sistema.

a) Calcule las corrientes de magnetización superficial $\vec{K}_M$ y volumétrica $\vec{J}_M$.
b) Calcule las densidades de carga de magnetización superficial σ_M (no considere las tapas ya que el cilindro es infinito) y volumétrica ρ_M.
c) Calcule $\vec{H}$ teniendo en cuenta su relación con la corriente de transporte, con σ_M y ρ_M.
d) Calcule $\vec{B}$ dentro y fuera del cilindro (puede utilizar la parte a) o la relación entre los campos $\vec{H}$, $\vec{B}$ y $\vec{M}$).

Ejercicio 3.

Considere una espira cuadrada de lado a, resistencia R y auto-inductancia L. Dicha espira puede girar libremente alrededor de un eje fijo que pasa por su arista AD (articulación cilíndrica lisa). La espira se encuentra inmersa en una región de campo magnético constante $\vec{B} = B\hat{x}$, como se muestra en la figura. Sobre la espira se ejerce un torque externo sobre el eje AD de manera que la misma gira con velocidad constante ω partiendo de la posición $\theta(0) = 0$ en tiempo cero.



a) Halle la corriente $i(t)$ definida con el signo que se muestra en la figura asumiendo que $i(0) = 0$.

b) Hallar el torque externo que se debe realizar sobre la espira para que esta se mueva con velocidad angular constante.

c) Suponga que ha pasado un tiempo suficientemente grande y el sistema está en régimen estacionario. Hallar la energía total disipada por la resistencia entre $t = 2n\pi/\omega$ y $t = (2n + 1)\,\pi/\omega$, con n entero y muy grande.