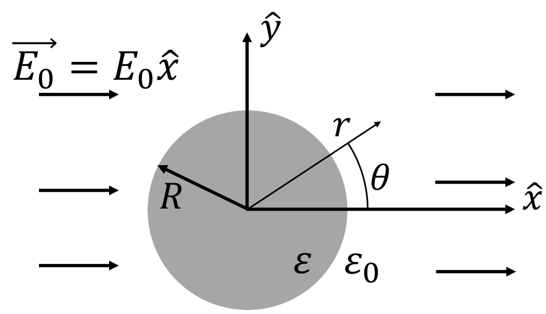
Electromagnetismo

Examen, 17 de diciembre de 2024

- Se deberá comunicar claramente los razonamientos realizados. Las respuestas correctas que no incluyan una correcta justificación, serán consideradas como incompletas.
- Se debe poner el nombre y documento en todas las hojas.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Problema 1

Considere un **cilindro** de radio R y logitud infinita compuesto de un medio dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo de permitividad ε, que se encuentra inmerso en una región del espacio donde existía un campo eléctrico uniforme en ausencia del cilindro ($\vec{E_0} = E_0\hat{x}$), como se muestra en la figura. El cilindro no tiene carga libre.



a. Demuestre que el potencial escalar electrostático en cada medio: $\phi_1(r,\theta)$ para $r < R$ y $\phi_2(r,\theta)$ para $r > R$, satisface la ecuación de Laplace.

b. Determine las condiciones de frontera muy lejos del cilindro y muy cerca del origen. Además, justifique detalladamente de donde provienen las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{(I)} \quad \left(\vec{D_2} - \vec{D_1}\right) \cdot \hat{e_r}\Big|_{r=R} = 0$$

$$\text{(II)} \quad \left(\vec{E_2} - \vec{E_1}\right) \cdot \hat{t_2}\Big|_{r=R} = 0$$

$$\text{(III)} \quad \phi_1(r = R, \theta) = \phi_2(r = R, \theta)$$

dónde $\hat{t_2}$ es un vector tangente a la superficie del cilindro. Justifique porque las condiciones (II) y (III) son intercambiables.

c. Considere soluciones a la ecuación de Laplace en coordenadas **cilíndricas** de la forma:

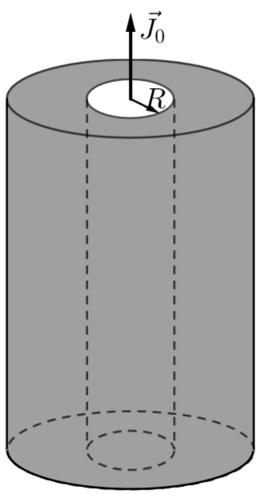
$$\phi(r,\theta) = A_0 + B_0 ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[r^n\Big(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)\Big)+r^{-n}\Big(C_n\cos(n\theta)+D_n\sin(n\theta)\Big)\right]$$

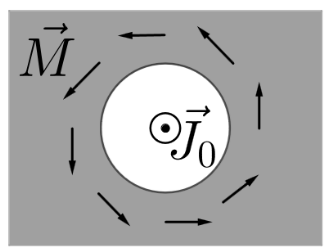
Halle los potenciales $\phi_1(r,\theta)$ y $\phi_2(r,\theta)$ considerando términos hasta el orden $n=1$. Justifique bajo qué condiciones se pueden considerar soluciones de la forma planteada y por qué puede ser correcto limitarse a términos con $n \leq 1$.

d. Halle los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$ en todo el espacio (dentro y fuera del medio dieléctrico cilíndrico).

e. Determine el valor de las densidades de polarización ρ_P y σ_P.

Problema 2





Considere un cilindro infinito lineal de permitividad μ_0 y de radio R que transporta una densidad de corriente uniforme en la dirección de su eje $\vec{J} = J_0\hat{k}$ con $J_0 > 0$. El mismo, está inmerso en un medio material magnético **no lineal** el cual presenta una magnetización espontánea circular en torno al eje del cilindro como se muestra en la figura. El material magnético se extiende al infinito. La magnetización es de la forma:

$$\vec{M} = M_\varphi \frac{R}{r}\hat{e}_\varphi$$

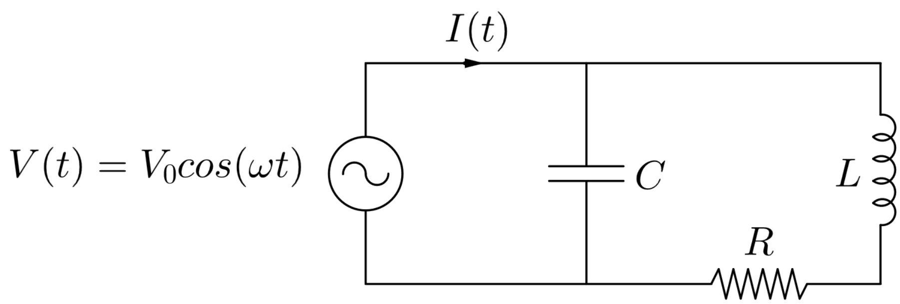
dónde M_φ es una constante y r es la distancia al eje del cilindro.

a. Determine el valor de las densidades superficial y volumétricas de corriente de magnetización $\vec{j}_M$ y $\vec{J}_M$, respectivamente sobre el material magnetizado.
Sugerencia: Recuerde que $\vec{j}_M = \vec{M} \times \hat{n}$ y $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ donde $\hat{n}$ es la normal saliente a la superficie magnetizada.

b. Halle las componentes de los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en todo el espacio.

Problema 3

Se estudiará el circuito de la figura en régimen permanente. El mismo tiene una fuente de voltaje $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, un condensador de capacitancia C, una resistencia R y una bobina ideal de inductancia L.



a. Halle la impedancia equivalente conectada a la fuente en función de R, L y C. Halle el módulo y la fase. Determine también la parte imaginaria de la impedancia equivalente.

b. Determine la corriente $I(t)$ por la fuente como función del tiempo.

c. Determine le frecuencia angular $\omega_0 > 0$ tal que el voltaje y la corriente por la fuente están en fase.

d. Para la frecuencia angular ω_0 calculada en la parte anterior, halle la potencia media disipada en el circuito.