Solución del examen de Electromagnetismo

28 de noviembre de 2024

Problema 1

a. Se tienen dos potenciales: ϕ_1 para $r < R$, o sea dentro del medio cilíndrico lineal y ϕ_2 para $r > R$ para el exterior del cilindro donde consideramos que hay vacío. Al estar trabajando con condiciones electrostáticas se cumple que el campo eléctrico es irrotacional, por lo tanto los potenciales cumplen

$$\nabla \times \vec{E_1} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E_1} = -\nabla\phi_1 \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{E_2} = 0 \Longleftrightarrow \vec{E_2} = -\nabla\phi_2 \tag{2}$$

A su vez, la ley de Gauss para medios dieléctricos en su forma diferencial dice:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$$

Al no haber carga libre en el sistema se tiene que $\rho_L = 0$:

$$\nabla \cdot \vec{D_1} = \nabla \cdot (\varepsilon\vec{E}_1) = \varepsilon\nabla \cdot \vec{E_1} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{D_2} = \nabla \cdot (\varepsilon_0\vec{E}_2) = \varepsilon_0\nabla \cdot \vec{E_2} = 0 \tag{4}$$

Combinando estos dos resultados llegamos a que se cumple la ecuación de Laplace para ambos medios:

$$\nabla^2\phi_1 = 0$$

$$\nabla^2\phi_2 = 0$$

b. Veamos como son las condiciones de frontera. Empecemos por cómo tiene que ser el comportamiento muy cerca del origen. En esa región del espacio está definido el potencial ϕ_1 y, al no haber carga libre el potencial es regular por lo que no diverge:

$$\lim_{r\to 0} \phi_1(r,\theta) = cte < \infty \tag{5}$$

Sin perder generalidad podemos tomar esa constante como 0.

Ahora veamos el comportamiento muy lejos del cilindro. En esa región del espacio está definido ϕ_2 y lo que uno espera es que el cilindro no afecte al campo eléctrico externo presente inicialmente:

$$\lim_{r\to\infty} \vec{E_2}(r,\theta) = E_0\hat{x}$$

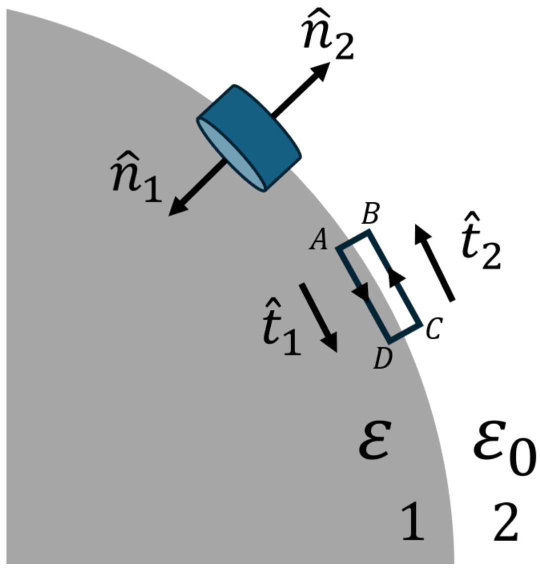
Pasando esa condición al potencial se tiene:

$$\lim_{r\to\infty} -\nabla\phi_2 = E_0\hat{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_2 \sim -E_0 x \quad \text{para}\, r \to \infty$$

x es la coordenada cartesiana, que cumple $x = r\cos\theta$, por lo tanto:

$$\phi_2(r,\theta) \sim -E_0 r\cos\theta \quad \text{para}\, r \to \infty \tag{6}$$

Ahora veamos las condiciones (I), (II) y (III). Para eso utilizaremos el siguiente diagrama en la interfaz entre los medios:



Para la condición (I) apliquemos Gauss en su forma integral en el cilindro de la figura

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_L$$

La carga libre encerrada es 0, y si consideramos que la altura del cilindro es muy pequeña entonces el flujo sobre la cara lateral es despreciable y solo tendremos flujo sobre las tapas de área S. Si estas son pequeñas:

$$\vec{D_2}\cdot\hat{n_2}S + \vec{D_1}\cdot\hat{n_1}S = 0$$

Notando que $\hat{n_2} = -\hat{n_1} = \hat{e}_r$ llegamos a la condición (I)

$$\left(\vec{D_2} - \vec{D_1}\right)\cdot\hat{e}_r = 0 \tag{7}$$

Para la condición (II) calculemos la circulación de $\vec{E}$ sobre la curva $ABCD$ de la figura. Como $\vec{E}$ es irrotacional se tiene:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

Tomemos los lados AB y CD muy pequeños y supongamos los lados AD y BC de largo l:

$$\vec{E_2} \cdot \hat{t_2} l + \vec{E_1} \cdot \hat{t_1} l = 0$$

con $\hat{t_1}$ y $\hat{t_2}$ tangentes al borde. Observando que $\hat{t_2} = -\hat{t_1}$ llegamos a la condición (II)

$$\left(\vec{E_2} - \vec{E_1}\right) \cdot \hat{t_2} = 0 \tag{8}$$

Para la condición (III) recordamos que $\vec{E} = -\nabla\phi$ y que las discontinuidades en este tipo de condiciones de borde para el campo eléctrico son finitas entonces esto implica que el potencial es continuo:

$$\phi_1(r = R, \theta) = \phi_2(r = R, \theta) \tag{9}$$

Por lo tanto esta condición arroja las mismas ecuaciones que la condición (II).

c. Las soluciones son de la forma:

$$\phi_1(r,\theta) = A_{10}+B_{10}ln(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[r^n\Big(A_{1n}\cos(n\theta)+B_{1n}\sin(n\theta)\Big)+r^{-n}\Big(C_{1n}\cos(n\theta)+D_{1n}\sin(n\theta)\Big)\right]$$

$$\phi_2(r,\theta) = A_{20}+B_{20}ln(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[r^n\Big(A_{2n}\cos(n\theta)+B_{2n}\sin(n\theta)\Big)+r^{-n}\Big(C_{2n}\cos(n\theta)+D_{2n}\sin(n\theta)\Big)\right]$$

Planteemos la condición de borde de en el origen 5:

$$\lim_{r\to 0}\phi_1(r,\theta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi_1(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\Big(A_{1n}\cos(n\theta) + B_{1n}\sin(n\theta)\Big)$$

Planteemos la condición de borde muy lejos del cilindro 6:

$$\phi_2(r,\theta) \sim -E_0 r\cos\theta \quad \text{para} \quad r\to\infty \quad \Longrightarrow \quad \phi_2(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta+\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\Big(C_{2n}\cos(n\theta)+D_{2n}\sin(n\theta)\Big)+A_{20}+B_{20}ln(r)$$

Planteemos la continuidad del potencial 10:

$$\phi_1(R,\theta) = \phi_2(R,\theta) \quad \forall\theta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^n\Big(A_{1n}\cos(n\theta)+B_{1n}\sin(n\theta)\Big) = -E_0 R\cos\theta+\sum_{n=1}^{\infty} R^{-n}\Big(C_{2n}\cos(n\theta)+D_{2n}\sin(n\theta)\Big)+A_{20}+B_{20}ln(R)$$

Las constantes y los diferentes senos y cosenos forman un conjunto linealmente independiente de funciones, por lo que cada valor de n debe anularse independientemente.

Para $n = 0$:

$$A_{20} + B_{20} ln(R) = 0.$$

Para $n = 1$:

$$RA_{11}\cos\theta + RB_{11}\sin\theta = -E_0 R\cos\theta + R^{-1}C_{21}\cos\theta + R^{-1}D_{21}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{11} = -E_0 + \dfrac{C_{21}}{R^2} \\ B_{11} = \dfrac{D_{21}}{R^2} \end{cases}$$

Para $n \geq 2$:

$$R^n\Big(A_{1n}\cos(n\theta) + B_{1n}\sin(n\theta)\Big) = R^{-n}\Big(C_{2n}\cos(n\theta) + D_{2n}\sin(n\theta)\Big)$$

$$\begin{cases} R^n A_{1n} = R^{-n}C_{2n} \\ R^n B_{1n} = R^{-n}D_{2n} \end{cases} \tag{10}$$

Planteemos la continuidad de la componente normal del desplazamiento 7:

$$\left(\vec{D_2} - \vec{D_1}\right)\cdot\hat{n_2} = 0 \Longrightarrow \left(\varepsilon_0\vec{E_2} - \varepsilon\vec{E_1}\right)\cdot\hat{e_r} = 0$$

$$\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \varepsilon_0\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

Calculemos las derivadas:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}\Big(A_{1n}\cos(n\theta) + B_{1n}\sin(n\theta)\Big)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial r} = -E_0\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty}(-n)r^{-(n+1)}\Big(C_{2n}\cos(n\theta) + D_{2n}\sin(n\theta)\Big) + \frac{B_{20}}{r}$$

Entonces:

$$\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}\Big(A_{1n}\cos(n\theta)+B_{1n}\sin(n\theta)\Big) = -E_0\varepsilon_0\cos\theta+\varepsilon_0\sum_{n=1}^{\infty}(-n)R^{-(n+1)}\Big(C_{2n}\cos(n\theta)+D_{2n}\sin(n\theta)\Big)+\varepsilon_0\frac{B_{20}}{r}$$

Para $n = 0$:

$$B_{20} = 0.$$

Para $n = 1$:

$$\varepsilon A_{11}\cos\theta + \varepsilon B_{11}\sin\theta = -E_0\varepsilon_0\cos\theta - \varepsilon_0 R^{-2}C_{21}\cos\theta - \varepsilon_0 R^{-2}D_{21}\sin\theta$$

$$\begin{cases} \varepsilon A_{11} = -E_0\varepsilon_0 - \varepsilon_0 R^{-2} C_{21} \\ \varepsilon B_{11} = -\varepsilon_0 R^{-2} D_{21} \end{cases}$$

Para $n \geq 2$:

$$\varepsilon n R^{n-1}\Big(A_{1n}\cos(n\theta) + B_{1n}\sin(n\theta)\Big) = \varepsilon_0(-n)R^{-(n+1)}\Big(C_{2n}\cos(n\theta) + D_{2n}\sin(n\theta)\Big)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \varepsilon n R^{n-1} A_{1n} = -n\varepsilon_0 R^{-(n+1)} C_{2n} \\ \varepsilon n R^{n-1} B_{1n} = -n\varepsilon_0 R^{-(n+1)} D_{2n} \end{cases} \tag{11}$$

Las ecuaciones 10 y 11 solo son compatibles si todas las constantes son cero para $n \geq 2$:

$$A_{1n} = B_{1n} = C_{2n} = D_{2n} = 0 \qquad n \geq 2$$

Con las ecuaciones para $n = 0$ tenemos:

$$\begin{cases} A_{20} = 0 \\ B_{20} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Para $n = 1$ tenemos:

$$\begin{cases} A_{11} = -E_0 + \dfrac{C_{21}}{R^2} \\ \varepsilon A_{11} = -E_0\varepsilon_0 - \varepsilon_0 \dfrac{C_{21}}{R^2} \end{cases} \tag{13}$$

y

$$\begin{cases} B_{11} = \dfrac{D_{21}}{R^2} \\ \varepsilon B_{11} = -\varepsilon_0 \dfrac{D_{21}}{R^2} \end{cases} \implies B_{11} = D_{21} = 0 \tag{14}$$

Del sistema en 13 obtenemos:

$$\begin{cases} A_{11} = \dfrac{-2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \\ C_{21} = \dfrac{E_0 R^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + \varepsilon_0} \end{cases} \tag{15}$$

En resumen:

$$\phi_1(r,\theta) = \frac{-2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} r\cos\theta \tag{16}$$

$$\phi_2(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + \varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r} \tag{17}$$

Estos potenciales satisfacen la ecuación de Laplace y también las condiciones de frontera por lo tanto por el teorema de unicidad son la única solución posible. Por el mismo motivo, si inicialmente nos hubiéramos limitado a considerar términos con $n \leq 1$, dado que es posible satisfacer todas las condiciones de borde con dichos términos, podríamos afirmar que hemos encontrado la solución correcta.

d. Para el medio 1 se tiene:

$$\vec{E_1} = -\nabla\phi_1 = -\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\hat{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\hat{e_\theta}$$

$$\vec{E_1} = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\cos\theta\hat{e_r} - \frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\sin\theta\hat{e_\theta} = \left(\frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\right)\underbrace{\left(\cos\theta\hat{e_r} - \sin\theta\hat{e_\theta}\right)}_{\hat{x}} \tag{18}$$

Como el medio es lineal $\vec{D_1} = \varepsilon\vec{E_1}$ y $\vec{D_1} = \varepsilon_0\vec{E_1} + \vec{P_1}$, entonces $\vec{P_1} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E_1}$

$$\vec{D_1} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\cos\theta\hat{e_r} - \sin\theta\hat{e_\theta}\right) \tag{19}$$

$$\vec{P_1} = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\cos\theta\hat{e_r} - \sin\theta\hat{e_\theta}\right) \tag{20}$$

Para el medio 2 se tiene:

$$\vec{E_2} = -\nabla\phi_2 = -\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\hat{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\hat{e_\theta}$$

$$\vec{E_2} = \left(E_0\cos\theta + \frac{E_0R^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\hat{e_r} + \left(-E_0\sin\theta + \frac{E_0R^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\hat{e_\theta}$$

$$\vec{E_2} = E_0\underbrace{\left(\cos\theta\hat{e_r} - \sin\theta\hat{e_\theta}\right)}_{\hat{x}} + \frac{E_0R^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\cos\theta\hat{e_r} + \sin\theta\hat{e_\theta}\right) \tag{21}$$

Como el medio 2 es vacío se cumple $\vec{D_2} = \varepsilon_0\vec{E_2}$ y $\vec{P_2} = 0$

$$\vec{D_2} = \varepsilon_0E_0\underbrace{\left(\cos\theta\hat{e_r} - \sin\theta\hat{e_\theta}\right)}_{\hat{x}} + \frac{\varepsilon_0E_0R^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\cos\theta\hat{e_r} + \sin\theta\hat{e_\theta}\right) \tag{22}$$

e. Las densidades de polarización sólo existen en el medio 1. La densidad superficial se calcula:

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{P_1}\cdot\hat{e_r} = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\cos\theta \tag{23}$$

La densidad volumétrica de calcula:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rP_r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial P_\theta}{\partial\theta}$$

$$\rho_P = -\frac{1}{r}\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\cos\theta = 0 \tag{24}$$

Problema 2

a. Para el caso de la densidad de corriente superficial observemos que el vector normal saliente a la superficie es $-\hat{e}_r$. Por lo tanto:

$$\vec{j}_M = M_\varphi \frac{R}{r}\bigg|_{r=R} \hat{e}_\varphi \times (-\hat{e}_r) = M_\varphi \hat{k}$$

Es decir, en la interfaz entre los dos medios existe una densidad superficial de corriente uniforme en dirección $\hat{k}$. Luego, para la densidad volumétrica de corriente tomamos rotor en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{J}_M = \nabla\times\vec{M} = M_\varphi R\nabla\times\left(\frac{\hat{e}_\varphi}{r}\right) = M_\varphi R\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{r}\right)\right]\hat{k} = 0$$

b. Dada la dirección de la corriente, por la regla de la mano derecha existirá un campo magnético en la dirección $\hat{e_\varphi}$. Por lo tanto, si consideramos una espira amperiana circular C concéntrica con el cilindro, de radio r y orientada en sentido antihorario, para las regiones $r < R$ y $r > R$ por la ley de Ampère tenemos que:

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} J_0\pi r^2 & \text{si } r < R \\ J_0\pi R^2 & \text{si } R < r \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\vec{H}(r) = \begin{cases} J_0\frac{r}{2}\hat{e}_\varphi & \text{si } r < R \\ J_0\frac{R^2}{2r}\hat{e}_\varphi & \text{si } R < r \end{cases}$$

Finalmente, dado que la magnetización es cero en la región para $r < R$ se cumple que: $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. Para la región en que $R < r$ tenemos: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, entonces:

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 J_0\frac{r}{2}\hat{e}_\varphi & \text{si } r < R \\ \mu_0\left(J_0\frac{R^2}{2r} + M_\varphi\frac{R}{r}\right)\hat{e}_\varphi & \text{si } R < r \end{cases}$$

Problema 3

a. Como la resistencia y la bobina están en serie, la impedancia equivalente de esos dos dispositivos es

$$\tilde{Z}_{eq} = R + j\omega L.$$

La rama de dichos dispositivos está en paralelo al condensador por lo que la impedancia equivalente por la fuente es:

$$Z_{eq} = \frac{1}{j\omega C + (\tilde{Z}_{eq})^{-1}} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L}} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + jR\omega C}.$$

El módulo de la impedancia resultante es:

$$|Z_{eq}| = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + R^2\omega^2 C^2}}.$$

La fase de la impedancia es:

$$\varphi \equiv Arg(Z_{eq}) = Arg(R + j\omega L) - Arg(1 - \omega^2 LC + jR\omega C).$$

El argumento del numerador se halla fácilmente:

$$Arg(R + j\omega L) = Arctan(\omega L/R).$$

El argumento del denominado es un poco más delicado pues $1 - \omega^2 LC$ puede cambiar de signo. Una manera de simplificarlo es la siguiente:

$$Arg(1-\omega^2 LC+jR\omega C) = Arg\Big(j(RC\omega - j(1-\omega^2 LC))\Big) = \pi/2 + Arctan\Big((1-\omega^2 LC)/(RC\omega)\Big).$$

En consecuencia:

$$\varphi = Arctan(\omega L/R) - Arctan\Big((1 - \omega^2 LC)/(RC\omega)\Big) - \pi/2.$$

La parte imaginaria de la impedancia se halla multiplicando el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$Z_{eq} = \frac{(R + j\omega L)(1 - \omega^2 LC - jR\omega C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + R^2\omega^2 C^2} = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + \omega^2 RLC + j\Big(\omega L(1 - \omega^2 LC) - R^2\omega C\Big)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + R^2\omega^2 C^2}.$$

Es decir, la parte imaginaria es:

$$Im(Z_{eq}) = \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - R^2\omega C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + R^2\omega^2 C^2}.$$

b. La corriente que circula por la fuente se calcula como

$$I(t) = Re(\frac{V_0}{Z_{eq}} e^{j\omega t}) = \frac{V_0}{|Z_{eq}|} cos(\omega t - \varphi),$$

con el módulo de la impedancia equivalante y su fase hallados en la parte anterior.

c. Para determinar la frecuencia ω_0 para la que la corriente y el voltaje por la fuente están en fase lo más simple en este caso es imponer que la parte imaginaria de la impedancia sea nula: $Im(Z_{eq}) = 0$ o, lo que es lo mismo, que:

$$\omega L(1 - \omega^2 LC) - R^2 \omega C = 0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones. O bien $\omega = 0$, o bien

$$L(1 - \omega_0^2 LC) = R^2 C,$$

que equivale a

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}.$$

d. La potencia media disipada es igual a la potencia media entregada por la fuente. Esta es igual a

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} V_0 \left| \frac{V_0}{Z_{eq}} \right| cos(\varphi).$$

Para la frecuencia angular ω_0, $\varphi = 0$ y el módulo de la impedancia se simplifica:

$$|Z_{eq}| = \frac{L}{RC},$$

por lo que

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{RC}{L}.$$