Solución 1

a. Se tratará el circuito magnético de la figura realizando las siguientes aproximaciones: la sección transversal del núcleo magnético es uniforme y de valor S, el campo magnético dentro del núcleo es uniforme y de valor B, como $\mu \gg \mu_0$ todo el flujo magnético Φ_B queda contenido dentro del circuito magnético, o lo que es lo mismo, no hay pérdidas de Φ_B. Además supondremos que $\vec{H}$ aproximadamente tiene la dirección del circuito magnético en todo tramo.

   Bajo estas aproximaciones, aplicando la ley de Ampère a un anillo amperiando que pase por el centro del núcleo magnético se tiene:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}.\vec{dl} = i_{enc} \Longrightarrow H4l = N_1 I_1 + N_2 I_2 \tag{1}$$

Usando que el flujo magnético es uniforme $\Phi_B = BS$ y que el material es lineal $B = \mu H$ se llega al valor de Φ_B:

$$\Phi_B = \frac{(N_1 I_1 + N_2 I_2)\mu S}{4l} \tag{2}$$

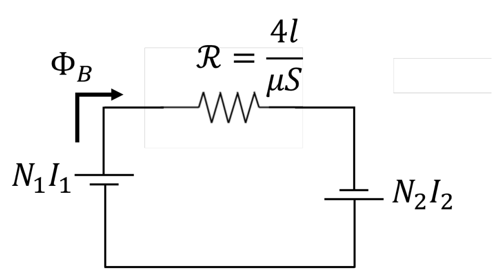
Ahora calculemos las autoinductancias y la mutua:

$$L_1 = N_1 \frac{\partial \Phi_B}{\partial I_1} = \frac{N_1^2 \mu S}{4l} \tag{3}$$

$$L_2 = N_2 \frac{\partial \Phi_B}{\partial I_2} = \frac{N_2^2 \mu S}{4l} \tag{4}$$

$$M = N_1 \frac{\partial \Phi_B}{\partial I_2} = N_2 \frac{\partial \Phi_B}{\partial I_1} = \frac{N_1 N_2 \mu S}{4l} \tag{5}$$

También se podría haber llegado al valor del flujo magnético realizando un circuito eléctrico equivalente:



b. Por la ley de Faraday se tiene que $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, pero como se calculó en la parte (a), el Φ_B es el mismo en ambas bobinas, por lo tanto tomando en cuenta la cantidad de vueltas se tiene:

$$V_1 = -N_1 \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \tag{6}$$

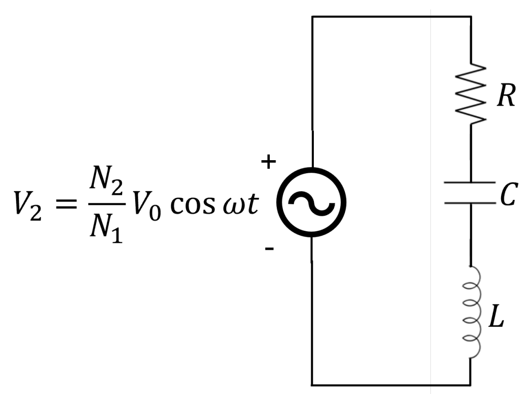
y

$$V_2 = -N_2 \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \tag{7}$$

Entonces

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \tag{8}$$

c. De la parte anterior el circuito se puede tratar de la siguiente forma:



Por lo tanto, trabajando en fasores se tiene:

$$\frac{N_2}{N_1} V_0 = I_2 R + \frac{I_2}{j\omega C} + j\omega L I_2 \tag{9}$$

$$I_2 = \frac{\frac{N_2}{N_1} V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{N_2}{N_1} V_0 \frac{\omega C}{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)} \tag{10}$$

Pasando a módulo y fase:

$$|I_2| = \frac{N_2}{N_1} V_0 \frac{\omega C}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \tag{11}$$

$$\arg(I_2) = -\arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right) \tag{12}$$

Por lo tanto $i_2(t)$ queda:

$$i_2(t) = \frac{N_2}{N_1} V_0 \frac{\omega C}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)\right) \tag{13}$$

d. La potencia media disipada la calculamos como la que disipa la resistencia:

$$P = \frac{1}{2}R|I_2|^2 = \frac{1}{2}R\left(\frac{N_2}{N_1}V_0\right)^2 \frac{\omega^2 C^2}{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2} \tag{14}$$

e. Si nos fijamos la expresión de la ecuación anterior podemos reescribir la potencia media disipada en la forma siguiente

$$P = \frac{1}{2}R\left(\frac{N_2}{N_1}V_0\right)^2 \frac{1}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \,. \tag{15}$$

De esta expresión se observa directamente que la expresión se maximiza cuando se minimiza el denominador, y eso se da cuando se cumple:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Longrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \,. \tag{16}$$

Solución 2

a. Por simetría, o utilizando la ley de la mano derecha, el campo magnético tiene la forma

$$\vec{B} = B\hat{e}_\phi \,, \tag{17}$$

dónde utilizamos coordenadas cilíndricas r, ϕ y z. Aplicando la ley de Ampére para un círculo cuyo centro es el alambre tenemos

$$2\pi r B = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \,. \tag{18}$$

b. El flujo magnético Φ a través del rectángulo está dado por

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int_0^a dz \int_d^{d+x(t)} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\log\left(\frac{d+x(t)}{d}\right) \,. \tag{19}$$

c. Por la ley de Faraday, la magnitud de la fem inducida es

$$\mathcal{E} = \left|\frac{d}{dt}\Phi\right| = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left|\frac{d}{dt}\log\left(\frac{d+x(t)}{d}\right)\right| = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{d+x(t)}\left|\frac{d}{dt}x(t)\right| \,, \tag{20}$$

donde $x(t) = x_0 + vt$. Entonces

$$\mathcal{E} = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{d+x_0+vt}|v| \,. \tag{21}$$

Para encontrar la corriente i usamos

$$\mathcal{E} = iR \implies \boxed{i = a\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{1}{d+x_0+vt}|v|} \,. \tag{22}$$

La dirección del campo magnético producido por el cable recto es hacia el interior de la página y el flujo va aumentando si $v > 0$. Entonces, el campo magnético inducido se opone a este cambio según la ley de Lenz. Por lo tanto el sentido de la corriente es antihorario si $v > 0$. Si $v < 0$ el sentido es opuesto.

d. Para mantener una velocidad constante, la fuerza neta sobre el cable que se mueve debe ser cero. La fuerza debida al campo magnético es, si $v > 0$,

$$\vec{F}_B = -aiB\hat{e}_r = -a^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{1}{d + x_0 + vt} |v| \frac{\mu_0 I}{2\pi(d + x_0 + vt)} \hat{e}_r \, . \tag{23}$$

Simplificando tenemos

$$\vec{F}_B = -\frac{|v|}{R} a^2 \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2(d + x_0 + vt)^2} \hat{e}_r \, . \tag{24}$$

Entonces, la fuerza externa es

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_B = \frac{|v|}{R} a^2 \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2(d + x_0 + vt)^2} \hat{e}_r \, . \tag{25}$$

Si $v < 0$, el sentido de las fuerzas se invierte.