Corrección del parcial de Electromagnetismo

Parcial, 1º de octubre de 2024

Ejercicio 1

a) La carga total del sistema es

$$Q = \sum_i q_i = q - q - q + q = 0.$$

El momento dipolar eléctrico respecto al orígen es:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q(2a\hat{k}) - q(a\hat{k}) - q(-a\hat{k}) + q(-2a\hat{k}) = \vec{0}.$$

b) Para probar la fórmula solicitada, se observa:

$$\frac{1}{|\vec{r} - b\hat{k}|} = \frac{1}{\sqrt{(z-b)^2 + x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2bz + b^2}} = \frac{1}{r}\Big(1 + \frac{b^2 - 2bz}{r^2}\Big)^{-1/2}$$

pues $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Ahora aplicamos el desarrollo de Taylor sugerido en la letra:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

eligiendo $x = (b^2 - 2bz)/r^2$ y $\alpha = -1/2$. Observe que para $r \gg b$, x es pequeño y de orden b/r pues $z = r\cos\theta$. Se obtiene:

$$\frac{1}{|\vec{r} - b\hat{k}|} = \frac{1}{r}\Big[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2 - 2bz}{r^2} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\Big(\frac{b^2 - 2bz}{r^2}\Big)^2 + \mathcal{O}\big(b^3/r^3\big)\Big].$$

Ahora bien, como ya hemos despreciado términos de órden $\mathcal{O}\big(b^3/r^3\big)$ en el corchete, la fórmula puede simplificarse de la manera siguiente:

$$\frac{1}{|\vec{r} - b\hat{k}|} = \frac{1}{r}\Big[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2 - 2bz}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{b^2 z^2}{r^4} + \mathcal{O}\big(b^3/r^3\big)\Big] = \frac{1}{r}\Big[1 + \frac{b\cos\theta}{r} + \frac{b^2}{2r^2}\big(3\cos^2\theta - 1\big) + \mathcal{O}\big(b^3/r^3\big)\Big].$$

Utilizando las expresiones para los polinomios de Legendre dadas en la letra, se obtiene la expresión que se quería probar.

c) El potencial electróstático generado por las cuatro cargas tiene la forma:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r} - 2a\hat{k}|} - \frac{1}{|\vec{r} - a\hat{k}|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\hat{k}|} + \frac{1}{|\vec{r} + 2a\hat{k}|}\right).$$

Sustituyendo la expresión obtenida en la parte anterior:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\overbrace{q(1-1-1+1)}^{Q}}{r} + \frac{\overbrace{q(2a - a + a - 2a)}^{p}\cos\theta}{r^2} + \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} q\Big((2a)^2 - a^2 - a^2 + (2a)^2\Big) + \mathcal{O}\big(a^3/r^4\big)\right).$$

Como la carga y momento dipolar totales son nulos, se obtiene

$$\varphi(\vec{r}) = C\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} + \mathcal{O}(a^3/r^4) \qquad \text{con} \quad C = 6qa^2/(4\pi\epsilon_0).$$

d) En el interior del cascarón esférico vale la ecuación de Laplace salvo en el orígen en el que tenemos el comportamiento singular: $\varphi(\vec{r}) \sim C\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}$ para $r \to 0$. Dado que el problema tiene simetría azimultal y la variable θ puede recorrer todo el intervalo $\theta \in [0, \pi]$, tal como fue visto en el teórico, el potencial puede escribirse como la suma infinita:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta).$$

Para determinar los coeficientes a_n y b_n debemos imponer las condiciones de borde. Dado el equivalente del potencial en el orígen:
$b_2 = C$ y $b_n = 0$ para todo $n \neq 2$ por lo que el potencial se simplifica a:

$$\varphi(\vec{r}) = C\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta).$$

Siendo el cascarón esférico un conductor, el mismo es un equipotencial. En la letra se elige el nivel cero del potencial nulo en dicho cascarón. Por tanto, debemos imponer la condición de borde $\varphi(r = R, \theta) = 0$ para todo θ. Es decir:

$$\varphi(r = R, \theta) = C\frac{P_2(\cos\theta)}{R^3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta) = 0.$$

Ahora bien, los polinomios de Legendre son linealmente independientes, por lo que concluímos que: $a_2 R^2 + C/R^3 = 0$ y $a_n = 0$ para todo $n \neq 2$, o, lo que es lo mismo:

$$\varphi(r, \theta) = CP_2(\cos\theta)\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{r^2}{R^5}\Big).$$

e) Dada la simetría azimultal, el campo eléctrico se escribe en coordenadas esféricas:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta.$$

Es decir:

$$E_r = CP_2(\cos\theta)\Big(\frac{3}{r^4} + 2\frac{r}{R^5}\Big),$$

y

$$E_\theta = 3C\cos\theta\sin\theta\Big(\frac{1}{r^4} - \frac{r}{R^5}\Big).$$

Ejercicio 2

a) Dada la simetría del problema, asumimos que los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$ son radiales en coordenadas cilíndricas. Además, suponemos que en cada una de las regiones dichos campos solo dependen de la distancia al eje de los cilindros. Verificaremos que hay una solución de esta forma que cumple las condiciones de borde y por unicidad de la solución será la correcta. Consideremos una superficie gausiana S cilíndrica de radio $a \leq r \leq b$ coaxial con los cilindros. Entonces, la ley de Gauss para el vector desplazamiento queda:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \; dS = Q_{lib} \;\rightarrow\; \int_{Borde} D \; \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dS$$

Dado que despreciamos efectos de borde, las normales a las tapas del cilindro son perpendiculares al campo $\vec{D}$ y entonces, si denominamos D_1 y D_0 a los campos en la regiones con permitividad ε y ε_0 respectivamente:

$$(2\pi - \alpha) r L D_0 + \alpha r L D_1 = Q_{lib} = Q \tag{1}$$

Observar que en la frontera del dieléctrico con el vacío se satisface que:

$$E_0^{Tangente} = E_1^{Tangente} \;\rightarrow\; \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{D_1}{\varepsilon_1} \;\rightarrow\; D_1 = kD_0$$

Sustituyendo en la ecuación 1 y despejando para ambos campos tenemos que:

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{D}_0 = \frac{Q}{rL[2\pi - \alpha + \alpha k]} \hat{e}_r \text{ si } a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq 2\pi \\ \vec{D}_1 = \frac{Qk}{rL[2\pi - \alpha + \alpha k]} \hat{e}_r \text{ si } a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

Y el campo eléctrico entre los cilindros es:

$$\vec{E} = \vec{E}_0^{Tangente} = \vec{E}_1^{Tangente} = \frac{Q}{\varepsilon_0 r L \left[2\pi - \alpha + \alpha k\right]} \hat{e}_r$$

Finalmente, para la polarización tenemos que:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq 2\pi \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{Q}{\varepsilon_0 r L[2\pi - \alpha + \alpha k]} \hat{e}_r & \text{si } a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

b) Recordar que la densidad superficial de polarización sobre el cilindro de radio a puede obtenerse como:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \Big|_{r=a},$$

donde $\hat{n}$ es la normal saliente al dieléctrico. Por lo tanto, en nuestro caso $\hat{n} = -\hat{e}_r$ y entonces:

$$\sigma_P = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{Q}{\varepsilon_0 a L \left[2\pi - \alpha + \alpha k\right]}.$$

c) Para el valor de la densidad de energía sabemos que:

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Entonces entre los cilindros:

$$u = \begin{cases} \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 r^2 L^2 [2\pi-\alpha+\alpha k]^2} & \text{si } a \le r \le b, \alpha \le \theta \le 2\pi \\ \frac{\varepsilon_1 Q^2}{2\varepsilon_0^2 r^2 L^2 [2\pi-\alpha+\alpha k]^2} & \text{si } a \le r \le b, 0 \le \theta \le \alpha \end{cases}$$

d) Para el valor de la energía, integramos el resultado anterior en el volumen entre los cilindros:

$$U = \frac{Q^2}{2L^2\left(2\pi-\alpha+\alpha k\right)^2}\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0^2}\int_0^\alpha d\theta + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\alpha^{2\pi} d\theta\right]\int_0^L dz\int_a^b \frac{1}{r^2} r dr = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 L\left(2\pi-\alpha+\alpha k\right)} ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Por lo tanto:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \;\to\; C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{\varepsilon_0 L\left(2\pi-\alpha+\alpha k\right)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}. \tag{2}$$

e) Observar que la pregunta se traduce en encontrar un valor de α tal que:

$$U(\alpha) = \frac{1}{2}U(\alpha = 0)$$

O, equivalentemente:

$$\frac{1}{2\pi-\alpha+\alpha k} = \frac{1}{2(2\pi-0+0)} \;\to\; \alpha = \frac{2\pi}{k-1}$$