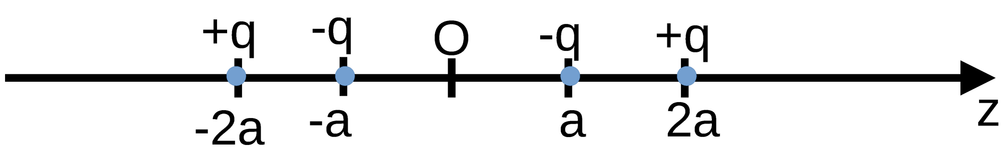
Electromagnetismo

Parcial, 1º de octubre de 2024

- Se deberá comunicar claramente los razonamientos realizados. Las respuestas correctas que no incluyan una correcta justificación, serán consideradas como incompletas.
- Se debe poner el nombre y documento en todas las hojas.
- Se recuerda que la prueba es individual.

Ejercicio 1



a) Considere cuatro cargas puntuales sobre el eje z con valores y posición tales como muestra la figura. Determine la carga y momento dipolar eléctrico respecto al orígen O (señalado en la figura) para dicho conjunto de cargas.

b) Muestre que para distancias r al orígen O mucho mayores que una distancia b fija, vale la expresión siguiente:

$$\frac{1}{|\vec{r}-b\hat{k}|}=\frac{1}{r}\left(P_0(\cos\theta)+P_1(\cos\theta)\frac{b}{r}+P_2(\cos\theta)\frac{b^2}{r^2}+\mathcal{O}\left((b/r)^3\right)\right).$$

dónde los $P_n(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre de orden correspondiente.
Recordatorio: Los primeros polinomios de Legendre son
$P_0(\cos\theta)=1$, $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$ y $P_2(\cos\theta)=(3\cos^2\theta-1)/2$. **Sugerencia:** Probablemente necesite utilizar el desarrollo de Taylor siguiente para $x \ll 1$:

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2+\mathcal{O}(x^3).$$

c) Deduzca que para distancias r al orígen O mucho mayores que la distancia a (distancia entre cargas señalada en la figura), el potencial eléctrico generado por el mencionado conjunto de cargas tiene la forma:

$$\varphi(\vec{r})=C\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}+\mathcal{O}(1/r^4)$$

con una constante C que se deberá determinar, siendo r y θ coordenadas esféricas y $P_2(\cos\theta)$ el polinomio de Legendre de orden 2.

d) Considere ahora la distribución de cargas analizada en la parte (a) ubicada en centro de un cascarón esférico conductor de radio R (se considerará a tendiendo a cero con C constante). Halle el potencial en todo punto al interior del cascarón esférico conductor. Se toma el potencial nulo en el cascarón esférico. **Sugerencia:** Es posible que deba utilizar la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas en condiciones que fueron especificadas en el teórico (y que, llegado el caso, deben señalarse):

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n+b_n r^{-(n+1)})P_n(\cos\theta).$$

d) Deduzca el campo eléctrico en el interior del cascarón esférico conductor.

Ejercicio 2

El sistema de la figura está formado por dos cilindros conductores C_1 y C_2, coaxiales, de longitud L muy grande y radios a y b respectivamente. Entre ellos se coloca un material dieléctrico homogéneo, isotrópico y lineal de permitividad $\varepsilon_1 = k\varepsilon_0$ que ocupa un volumen limitado por los planos radiales R_1 y R_2 que forman entre sí un ángulo α. En el resto del espacio entre los cilindros hay aire. Suponga que se coloca una carga $+Q$ en el cilindro C_1 y $-Q$ en el cilindro C_2. Despreciando los efectos de borde en los extremos de los cilindros:

a) Halle el valor de los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$ en cada región entre los cilindros.

b) Halle el valor de la densidad de carga superficial de polarización sobre el cilindro C_1.

c) Determine la densidad volumétrica de energía electrostática.

d) Halle el valor total de la energía electrostática almacenada en el sistema y deduzca el valor de la capacitancia del mismo.

e) ¿Cuál debería ser el valor de α para que la energía almacenada con el dieléctrico sea la mitad de la que se hubiera almacenado si en lugar de dieléctrico se coloca aire (manteniendo fijas las cargas en los conductores)?