Modelado de propiedades con autómatas finitos

Parte I: Autómata finito determinista

Teoría de Lenguajes

2020

Introducción

Esta es la primera parte de dos documentos cuyo objetivo es brindar ejemplos explicados paso a paso sobre el modelado de propiedades usando autómatas finitos.

En esta primera parte veremos dos ejemplos utilizando el modelo de **autómata finito determinista** (AFD).

Ejemplo 1 - Controlar la paridad

El problema

El primer ejemplo que veremos es el del lenguaje sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ definido como

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* : |w|_0 \mod 2 = 0 \wedge |w|_1 \mod 2 = 1\}$$

Tenemos que L_1 está compuesto por todas las tiras de Σ^* donde la cantidad de $0s$ es par y la de $1s$ es impar.

Diseñando una posible solución

Tal como se mencionó en la clase teórica, uno de los puntos más importantes para diseñar un autómata es pensar en una **semántica** para los estados. Es decir, cada estado representará algo: un conteo de algún largo, el ignorar símbolos si no son relevantes a la resolución del problema o, el más famoso, el *estado pozo*, entre otros.

Como regla general y más aún en este caso, lo que podemos que pensar es

¿cuántos casos posibles hay para las tiras del lenguaje?

Entonces, yendo en esa dirección, podemos ver que los valores posibles para las propiedades del lenguaje son:

- $|w|_0 \mod 2 = 0$ o $|w|_0 \mod 2 = 1$
- $|w|_1 \mod 2 = 0$ o $|w|_1 \mod 2 = 1$

Pero cuidado, porque ambas condiciones (*paridad* de $0s$ y $1s$) deben ser controladas al mismo tiempo. Entonces, usando informalmente una intuición similar a la de la *regla del producto*, vemos que los posibles casos son:

1. $|w|_0 \mod 2 = 0$ y $|w|_1 \mod 2 = 0$
2. $|w|_0 \mod 2 = 0$ y $|w|_1 \mod 2 = 1$
3. $|w|_0 \mod 2 = 1$ y $|w|_1 \mod 2 = 0$
4. $|w|_0 \mod 2 = 1$ y $|w|_1 \mod 2 = 1$

Como se habrán dado cuenta, cada uno de esos casos representará un **estado** del AFD. O sea, llegamos a diseñar estados con una semántica particular.

Lo que nos falta ver es cuál o cuáles serán los estados finales. Las tiras válidas son las que cumplen la condición $|w|_0 \mod 2 = 0$ y $|w|_1 \mod 2 = 1$, por lo que el caso número 2 es el que comprende dicha semántica.

A continuación recopilaremos esta información en una tabla **ilustrativa**, ya poniéndole nombre a los estados:

Estado	$\|w\|_0 \mod 2$	$\|w\|_1 \mod 2$
q_0	0	0
q_1	0	1
q_2	1	0
q_3	1	1

El estado final será q_1 dado que es el que representa el caso número 2.

Atención : *los casos están numerados a partir del 1 y los estados a partir del 0, por lo que el caso número 2 está representado en el estado* q_1.

Implementando la solución

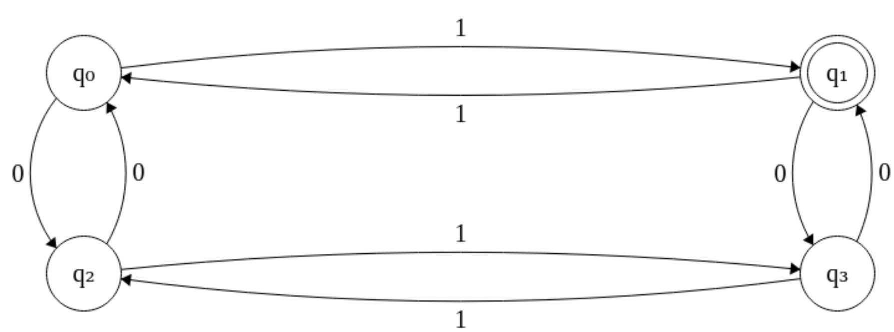
Bien, ya tenemos **los estados**, cada uno con su **semántica** particular. Ahora nos falta definir la **función de transición** δ. El procedimiento es sencillo, tendremos que ver a qué estado vamos luego de que nos venga un determinado símbolo. Por ejemplo, si estábamos en el estado q_3, sabíamos que ambos símbolos llevaban una cuenta impar; por lo tanto, si viene un 0, la cantidad de $0s$ quedará par mientras que la de $1s$ quedará impar, por lo que iremos al estado q_1. Por lo tanto, pensando cada caso de esa manera, llegamos a la función de transición:

δ	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Así que ya contamos con todos los elementos de un AFD:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ es el conjunto de estados.
- $\Sigma = \{0, 1\}$ es el alfabeto.
- δ es la función de transición que acabamos de definir.
- q_0 es el estado inicial.
- $F = \{q_1\}$ es el conjunto de estados finales.

Para finalizar, dibujamos el autómata finito determinista resultante:



Nota : *como mencionamos previamente, la tabla de la página anterior (que recoge los casos posibles) tiene fines ilustrativos y por lo tanto no forma parte de la solución formal. En cambio, la tabla de esta página sí es parte de la solución dado que describe la función* δ*.*

Ejemplo 2 - Controlar una cantidad y un módulo

El problema

Ahora el problema será diseñar un AFD que reconozca las tiras del lenguaje

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* : |w|_a < 2 \wedge |w|_b \mod 3 = 1\} \text{ sobre } \Sigma = \{a, b\}$$

Diseñando una posible solución

Análogamente a como desarrollamos el caso anterior, observamos que los posibles valores de cada propiedad son:

- $|w|_a = 0$ o $|w|_a = 1$ o $|w|_a \geq 2$
- $|w|_b \mod 3 = 0$ o $|w|_b \mod 3 = 1$ o $|w|_b \mod 3 = 2$

Entonces los posibles casos son:

1. $|w|_a = 0$ y $|w|_b \mod 3 = 0$
2. $|w|_a = 0$ y $|w|_b \mod 3 = 1$
3. $|w|_a = 0$ y $|w|_b \mod 3 = 2$
4. $|w|_a = 1$ y $|w|_b \mod 3 = 0$
5. $|w|_a = 1$ y $|w|_b \mod 3 = 1$
6. $|w|_a = 1$ y $|w|_b \mod 3 = 2$

¿Qué sucede si $|w|_a \geq 2$? Bueno, lo vamos a ver antes de hacer la tabla de casos asociados a estados. Notemos que si en la tira w hay 2 o más símbolos a, entonces la tira no pertenecerá al lenguaje. Por tanto, haremos que ni bien llegue el segundo símbolo a, el AFD se mueva a un estado pozo del que no podrá salir. Adicionalmente, vemos que los casos que contemplan las tiras válidas del lenguaje L_2 son el número 2 y 5.

Nota : *el estado pozo no es necesario dado que se deduce que toda transición no definida en δ irá a dicho estado. Sin embargo, en este ejemplo lo vamos a incluir con fines ilustrativos.*

Ahora sí, hagamos la tabla *ilustrativa* de casos posibles y estados, manteniendo en mente que los estados finales serán q_1 y q_4:

Estado	$\|w\|_a$	$\|w\|_b \mod 3$
q_0	0	0
q_1	0	1
q_2	0	2
q_3	1	0
q_4	1	1
q_5	1	2
q_{pozo}	2	cualquier cantidad

Implementando la solución

Análogamente a cómo pensamos las transiciones en el ejemplo anterior, obtenemos la función de transición:

δ	a	b
q_0	q_3	q_1
q_1	q_4	q_2
q_2	q_5	q_0
q_3	q_p	q_4
q_4	q_p	q_5
q_5	q_p	q_3
q_p	q_p	q_p

Entonces nuestro AFD está definido por:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_p\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- δ es la función de transición que acabamos de definir.
- q_0 es el estado inicial.
- $F = \{q_1, q_4\}$