Señales y Sistemas

Práctico 0
Repaso de conocimientos previos

2020

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

Exponenciales complejas

✦ Ejercicio 1 (1.2)

Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma polar ($re^{j\theta}$, con $-\pi < \theta \leq \pi$), y representarlo en el plano complejo:

(a) -2

(b) $-j3$

(c) $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $1 + j$

(e) $(1 - j)^2$

(f) $j(1 - j)$

(g) $\frac{(1+j)}{(1-j)}$

✦ Ejercicio 2 (1.51)

Usar la relación de Euler para obtener las siguientes relaciones:

(a) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$

(b) $\sin(\theta) = \frac{1}{j2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

(c) $\cos(\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$

(d) $\sin(\theta)\sin(\phi) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi))$

(e) $\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$

Sumatorias

★ Ejercicio 3 (1.54)

(a) Probar la validez de las siguientes expresiones:

$$\sum_{n=a}^{b} \alpha^n = \begin{cases} b+1-a & \alpha = 1 \\ \alpha^a \frac{1-\alpha^{b+1-a}}{1-\alpha} & \text{para cualquier complejo } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Donde $a \leq b$. A menudo a esto se le llama la *fórmula de suma finita.*

(b) Demostrar que si $|\alpha| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

(c) Evaluar

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n,$$

suponiendo que $|\alpha| < 1$.

✦ Ejercicio 4 (1.55)

Usar los resultados del problema anterior para evaluar cada una de las siguientes sumas y expresar su respuesta en forma cartesiana:

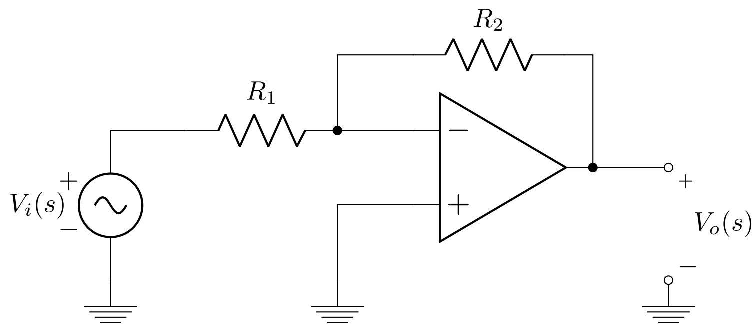
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\pi n/2}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(\frac{\pi}{2} n)$

Teoría de circuitos

✦ Ejercicio 5

Amplificador inversor



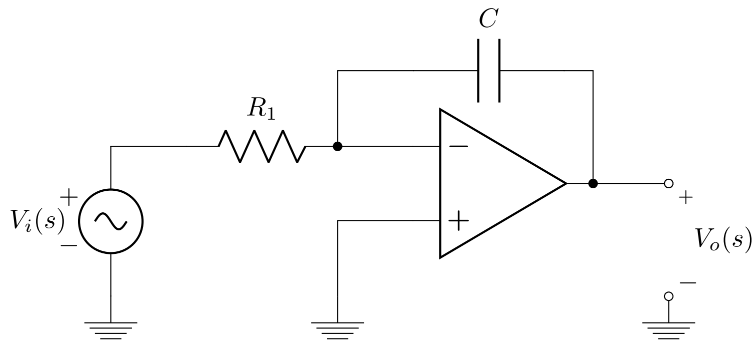
El amplificador de la figura es ideal y trabaja en zona lineal.

(a) Calcular la transferencia del sistema $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

(b) Calcular la respuesta al impulso y al escalón

⋆ Ejercicio 6

Amplificador integrador



El amplificador de la figura es ideal y trabaja en zona lineal.

(a) Calcular la transferencia del sistema $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

(b) Calcular la respuesta al impulso y al escalón.

(c) Expresar la salida $V_o(t)$ en función de $V_i(t)$.

Periodicidad

✦ Ejercicio 7 (1.9, 1.25, 1.26)

Determinar si cada una de las siguientes señales es o no periódica. Si una señal es periódica, especificar su período fundamental:

(a) $x(t) = je^{j10t}$

(b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$

(c) $x[n] = e^{j7\pi n}$

(d) $x[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

(e) $x(t) = 3\cos(4t + \frac{\pi}{3})$

(f) $x(t) = [\cos(2t - \frac{\pi}{3})]^2$

(g) $x[n] = \sin(\frac{6\pi}{7}n + 1)$

(h) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)$

⋆ Ejercicio 8 (1.32)

Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo, y sean $y_1(t) = x(2t)$ y $y_2(t) = x(t/2)$. La señal $y_1(t)$ representa una versión más rápida de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal disminuye a la mitad. De manera similar, $y_2(t)$ representa una versión más lenta de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal se ha duplicado. Considerar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_1(t)$ es periódica.

(b) Si $y_1(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

(c) Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_2(t)$ es periódica.

(d) Si $y_2(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

Para cada afirmación, determinar si es verdadera, y si lo es, determinar la relación entre los períodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado. Si no es verdadera, plantear un contraejemplo de ella.

⋆ Ejercicio 9 (1.33)

Sea $x[n]$ una señal de tiempo discreto, y sean

$$y_1[n] = x[2n] \text{ y } y_2[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases} .$$

Las señales $y_1[n]$ y $y_2[n]$ representan respectivamente en algún sentido las versiones rápida y lenta de $x[n]$. Sin embargo, se debe notar que las nociones de tiempo discreto de rapidez y lentitud tienen sutiles diferencias con respecto a sus contrapartes de tiempo continuo. Considerar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_1[n]$ es periódica.

(b) Si $y_1[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.

(c) Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_2[n]$ es periódica.

(d) Si $y_2[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.

Para cada afirmación, determinar si es verdadera, y si lo es, determinar la relación entre los períodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado. Si no es verdadera, plantear un contraejemplo de ella.

⋆ Ejercicio 10 (3.54)

(a) Demostrar el siguiente resultado:

$$x[k] = \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Interpretar este resultado como un fasor girando en el plano complejo.

Considerar la función

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

(b) Demostrar que $a[k] = N$ para $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, ...$

(c) Demostrar que $a[k] = 0$ siempre que k no sea un múltiplo entero de N. (Sugerencia: usar la fórmula de suma finita.)