

Señales Aleatorias y Modulación

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de Julio de 2024

Indicaciones:

- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas. Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta 1

1. Definir un proceso estocástico.
2. Definir un proceso estacionario en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS).
3. ¿Bajo qué condiciones un proceso SSS es WSS? y ¿Bajo qué condiciones un proceso WSS es SSS?

Pregunta 2

1. Realizar el diagrama de bloques de un transmisor AM y de los dos posibles receptores vistos en el curso explicando brevemente cada bloque.
2. Hallar el desempeño obtenido con ambos receptores, comparar el resultado y las hipótesis. ¿Ocurre lo mismo en el caso de la modulación DSB?

Problema 1

Sea X_t es un proceso WSS de media nula con densidad espectral de potencia $S_X(f)$. Esta señal es enviada por un transmisor, recibándose en recepción la señal original y su eco amplificado con una constante A de la forma:

$$Y_t = X_t + AX_{t-\Delta_t}$$

- (a) Mostrar que Y_t es WSS.
- (b) Consideremos el caso en que Y_t se filtra con un filtro $H(f)$ LTI estable. Dar la expresión de la densidad espectral de potencia de la señal filtrada.

Supongamos ahora que el receptor recibe la señal original, su eco amplificado con una constante A y ruido blanco aditivo de la forma:

$$Y_t = X_t + AX_{t-\Delta_t} + Z_t$$

donde Z_t es ruido blanco gaussiano de media nula y densidad espectral de potencia $S_Z(f) = \eta/2$, independiente de X_t .

- (c) Hallar $S_Y(f)$ en función de $S_x(f)$, Δ_t y η .
- (d) Hallar la densidad de potencia conjunta $S_{XY}(f)$.

- (e) ¿Cuál es el filtro que aplicado a Y produce el estimado \hat{X}_t que minimiza el error cuadrático medio respecto a X_t ? Hallar su expresión en función de $S_x(f)$, Δ_t y η .
- (f) ¿Cómo actúa este filtro para las frecuencias en donde el ruido predomina sobre la señal y viceversa?

Problema 2

En el marco de los Juegos Olímpicos París 2024, se requiere su asesoramiento técnico para el desarrollo de un sistema de comunicación inalámbrica. La solución debe permitir comunicaciones de voz para los árbitros de distintos deportes, con un requerimiento de distancia máxima de 300m. Este sistema debe operar en la banda de UHF, en frecuencias sub-GHz comprendidas entre 460 MHz y 462 MHz. La modulación a utilizar será FM con una desviación de frecuencia $f_\Delta = 75$ kHz y una mínima SNR_D de 25 dB. La única atenuación a considerar es la del aire, la cual se modela en forma simplificada con la ecuación de Friis¹. Se desprecia tanto la ganancia de las antenas, así como otras pérdidas en cables y conectores. Además el amplificador de recepción introduce un ruido AWGN con $\eta_A = 10^{-14}$ W/Hz.

- (a) Hallar el ancho de banda del audio máximo que se puede utilizar para tener 5 canales con una separación mínima de 220 kHz. Indicar el ancho de banda de la señal FM resultante para cada canal y las frecuencias centrales de los canales.
- (b) Si se trabaja con un ancho de banda del audio de 10 kHz y una separación entre canales de 100 kHz ¿cuántos canales podrían operar en este caso?

En el diseño se define un ancho de banda de audio de $W = 15$ kHz y una potencia de señal $S_x = 0.5$.

- (c) Determinar la mínima potencia de transmisión para que el sistema opere correctamente.

Finalmente, para evitar las fluctuaciones de volumen en el audio, el sistema de recepción debe tener una señal de audio de salida de amplitud constante A_0 , sin importar la potencia transmitida ni la distancia entre el transmisor y el receptor.

- (d) Explicar cómo se logra esto cuando se utiliza modulación FM.
- (e) ¿Qué cambia cuando la modulación es AM y cómo se soluciona?

¹Atenuación en espacio libre de Friis: $L(d, f) = \left(\frac{4\pi df}{c}\right)^2$, siendo $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Solución

Pregunta

Ver teórico.

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a) En primer lugar tenemos que $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[X_{t-\Delta_t}] = m_X + Am_X$ que no depende de t pues X_t es WSS.

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} R_y(t, s) &= \mathbb{E}[(X_t + AX_{t-\Delta_t})(X_s + AX_{s-\Delta_t})] \\ &= \mathbb{E}[X_t X_s] + A\mathbb{E}[X_t X_{s-\Delta_t}] + A\mathbb{E}[X_{t-\Delta_t} X_s] + A^2\mathbb{E}[X_{t-\Delta_t} X_{s-\Delta_t}] \\ &= R_X(\tau) + AR_X(\tau + \Delta_t) + AR_X(\tau - \Delta_t) + A^2R_X(\tau) \end{aligned}$$

que depende de τ y luego al evaluarla en 0 queda $< +\infty$ por lo que Y_t es WSS.

(b) $S_Y(f) = (1 + A^2)S_X(f) + AS_X(f)(e^{-j2\pi\Delta_t f} + e^{j2\pi\Delta_t f}) = (1 + A^2)S_X(f) + 2AS_X(f)\cos(2\pi\Delta_t f)$
Luego $S_{salida}(f) = |H(f)|^2 S_Y(f)$

(c) Podemos escribir Y_t como $Y_t = g(t) * X_t + Z_t$ donde $g(t) = \delta(t) + A\delta(t - \Delta_t)$. Por lo que tenemos:

$$S_Y(f) = |G(f)|^2 S_X(f) + S_Z(f) = |1 + Ae^{-j2\pi\Delta_t f}|^2 S_X(f) + \eta/2$$

(d) Escribimos la autocorrelación cruzada como:

$$R_{XY}(\tau) = E[X_{t+\tau} Y_t] = E[X_{t+\tau}(X_t + AX_{t-\Delta_t} + Z_t)] = E[X_{t+\tau} X_t] + AE[X_{t+\tau} X_{t-\Delta_t}] + E[X_{t+\tau} Z_t]$$

donde el último término es nulo por ser Z_t independiente de X_t y X_t de media nula.

Por lo tanto, como X_t es WSS, tenemos que:

$$R_{XY}(\tau) = E[X_{t+\tau} X_t] + AE[X_{t+\tau} X_{t-\Delta_t}] = R_X(\tau) + AR_X(\tau + \Delta_t) = (\delta(t) + A\delta(t + \Delta_t)) * R_X(\tau)$$

y finalmente

$$S_{XY}(f) = \mathcal{F}(R_{XY}(\tau)) = (1 + Ae^{j2\pi\Delta_t f}) S_X(f)$$

(e) El estimador óptimo es el que se obtiene al aplicar el filtro de Wiener a Y_t :

$$\hat{X}_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) Y_{t-s} ds$$

donde

$$\mathcal{F}(h(t)) = H(f) = \frac{S_{XY}(f)}{S_Y(f)} = \frac{(1 + Ae^{j2\pi\Delta_t f}) S_X(f)}{|1 + Ae^{-j2\pi\Delta_t f}|^2 S_X(f) + \eta/2}$$

(f) La respuesta en frecuencia del filtro podemos escribirla como

$$\mathcal{F}(h(t)) = H(f) = \frac{S_{XY}(f)}{S_Y(f)} = \frac{(1 + Ae^{j2\pi\Delta_t f})}{|1 + Ae^{-j2\pi\Delta_t f}|^2 + \frac{\eta}{2S_X(f)}}$$

A partir de esta expresión se observa que la respuesta en frecuencia del filtro se atenúa donde el ruido predomina respecto a la señal ($\eta \gg S_X(f)$) y se amplifica cuando la señal predomina respecto al ruido ($\eta \ll S_X(f)$).

Problema 2

(a) Teniendo un ancho de banda total de 2 MHz, de los cuales 880 kHz quedan para la separación entre canales, se deduce que el ancho de banda máximo de cada canal debe ser $B_{max} = 1120 \text{ kHz}/5 = 224 \text{ kHz}$. De allí se deduce cuál puede ser el máximo ancho de banda del audio a utilizar: $B = 2(D + 2)W$ con $D = \frac{f_{\Delta}}{W}$, por lo que tenemos: $W_{max} = \frac{B_{max} - 2f_{\Delta}}{4}$ con $B_{max} = 224 \text{ kHz}$.

Despejando se tiene $W_{max} = 18.5 \text{ kHz}$. Notar que el D resultante es 4.05, estando en el rango entre 1 y 10, coherente con la regla de Carson utilizada.

Las frecuencias centrales de los canales resultantes quedan 460.112 MHz, 460.556 MHz, 461 MHz, 461.444 MHz y 461.888 MHz respectivamente.

(b) Ahora $W = 10 \text{ kHz}$ por lo que mediante $B = 2(f_{\Delta} + 2W)$ se llega a que $B = 190 \text{ kHz}$. Con un ancho de banda total de 2 MHz y una separación entre canales de 100 kHz se tiene:

- 7 canales: $7 \cdot 190 \text{ kHz} + 6 \cdot 100 \text{ kHz} = 1.93 \text{ MHz}$
- 8 canales: $8 \cdot 190 \text{ kHz} + 7 \cdot 100 \text{ kHz} = 2.22 \text{ MHz}$

Por lo tanto, el máximo número de canales en este caso es 7.

(c) La distancia máxima es de 300 metros, mientras que la máxima frecuencia es 462 MHz. Sustituyendo en la ecuación de Friis, esto nos da una atenuación máxima de 75.28 dB.

Para FM la SNR_D está dada por $3D^2 S_x \gamma$ siendo $\gamma = \frac{S_T}{\eta L W}$.

Despejando la potencia y haciendo el cálculo, llegamos al valor mínimo de $S_T = 42.6 \text{ mW}$.

Además, es necesario verificar el umbral de FM, dado por $SNR_R = \frac{S_T}{\eta L B} \Rightarrow 10$, que en este caso se verifica para el valor de S_T mínimo calculado previamente.

(d) En la modulación FM, las variaciones en la potencia de la señal recibida no afectan directamente al mensaje, por lo cual no es necesario hacer un ajuste automático de la ganancia en el receptor. De todas formas, sí juega un papel en este sentido el limitador que se aplica a la señal en recepción, evitando la saturación de la salida cuando se producen picos en la señal recibida.

(e) Para el caso de AM, las variaciones en la potencia de la señal afectan directamente al mensaje, por lo cual es necesario hacer un ajuste automático de la ganancia variable que se utiliza en el receptor. Para ello, se utiliza la potencia de la portadora en el receptor para estimar la ganancia necesaria, de manera de mantener una amplitud constante para el mensaje detectado.

En la práctica se ajusta la ganancia realimentando el valor de portadora a la salida de filtro de recepción, y es lo que se llama control automático de volumen.