

# Señales Aleatorias y Modulación

## Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

24 de Julio de 2023

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Pregunta 1

1. Definir un proceso estacionario en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS). ¿Bajo qué condiciones un proceso SSS es WSS? ¿Bajo qué condiciones un proceso WSS es SSS?
2. Sea  $Y(t)$  la salida de un filtro LTI estable, de respuesta en frecuencia  $H(f)$ , sea  $X(t)$  la entrada al filtro un proceso estacionario en sentido amplio (WSS). Dar la expresión de la densidad espectral de potencia de  $Y(t)$  en función de la de  $X(t)$  y de la respuesta del filtro.

### Pregunta 2

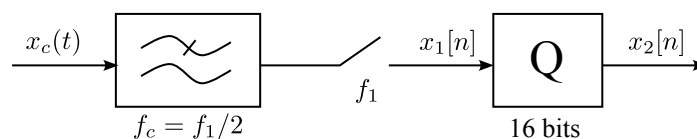
1. Realizar el diagrama del modelo de canal general explicando brevemente cada bloque.
2. Suponer que se utiliza un repetidor analógico real idéntico al receptor. Para este sistema, dibujar el diagrama de bloques correspondiente y deducir la ubicación óptima del repetidor cuando el medio es el aire. Considerar que tanto el repetidor como el receptor tienen ganancias que compensan las pérdidas asociadas al tramo inmediatamente anterior de canal.<sup>1</sup>

### Problema 1

Se considera un proceso estacionario en sentido amplio  $x_c(t)$  con densidad espectral de potencia:

$$S_{x_c}(f) = 0,1 [1 + \cos(2\pi f/f_1)] \Pi\left(\frac{f}{f_1}\right)$$

Se decide muestrear el proceso  $x_c$  con una frecuencia de muestreo  $f_s = f_1$  obteniendo  $x_1[n]$  según se muestra en la figura.



<sup>1</sup>Friis:  $L = (4\pi d f/c)^2$ , siendo  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

- (a) Hallar la densidad espectral de potencia del proceso  $x_1[n]$  que resulta del muestreo.
- (b) Hallar la autocorrelación del proceso  $x_1[n]$ .
- (c) Hallar la potencia del proceso  $x_1[n]$ .

La señal se asume que varía un rango de valores entre -1 y 1 es cuantizada con un cuantizador de 16 bits.

- (d) Indicar el modelo de error de cuantización. Hallar su autocorrelación y su densidad espectral de potencia.
- (e) Hallar la SNR luego de la cuantización.

Se desea mejorar la SNR, por lo que se sobremuestra al doble de la frecuencia utilizada ( $2f_1$ ).

- (f) Dar un diagrama de bloques del sistema que realice esta mejora.
- (g) Calcular la nueva SNR.

## Problema 2

Un modulador de ley cuadrática genera una señal AM mediante la utilización de componentes no lineales, como por ejemplo diodos. La implementación más simple se puede ver en la Figura 1.

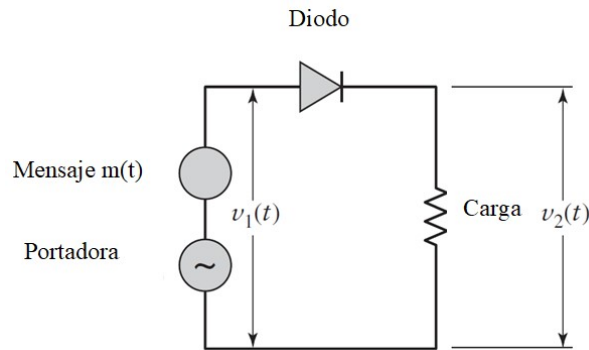


Figura 1: Implementación simple de un modulador de ley cuadrática.

Ignorando los términos de mayor orden, la salida del modulador se puede representar como:

$$v_2(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t)$$

donde  $v_1(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)$  es la señal de entrada al circuito y  $a_1$  y  $a_2$  son constantes.

- (a) Escribir la expresión de  $v_2(t)$  y bosquejar su espectro, asumiendo que el mensaje es de banda limitada  $W$ . Explicitar qué parte corresponde a la señal AM a transmitir y qué parte se considera distorsión.
- (b) Para obtener la señal AM deseada se requiere agregar un filtro pasabanda a la salida del modulador. Determinar la frecuencia central y el mínimo ancho de banda de dicho filtro. Demostrar que para evitar que haya distorsión se debe cumplir que la frecuencia de la portadora sea  $f_c > 3W$ .
- (c) Realizar el diagrama de bloques de un posible receptor para recibir la señal. ¿Qué condición deben cumplir  $a_1$  y  $a_2$  para que no haya sobremodulación?
- (d) Para el receptor elegido en la parte anterior y considerando un mensaje  $m(t)$  de potencia  $P$  ancho de banda  $W$ , hallar la potencia de la señal detectada y el ruido correspondiente. Asumir que no existe atenuación en el canal y que el receptor introduce ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral de potencia  $N_0/2$ . Determinar la relación señal a ruido en detección correspondiente.

# Solución

## Pregunta

Ver teórico.

## Problema 1

(a) El filtro pasabajos a la entrada no tiene efecto sobre la el proceso ya que es de banda limitada  $f_1/2$ . Al tomar el proceso muestreado, se obtiene que la autocorrelación es el muestreo de la autocorrelación del proceso en tiempo discreto y en el dominio de frecuencia, la densidad espectral de potencia corresponde al escalado y periodización de la densidad espectral de potencia en tiempo continuo.

Se tiene entonces que:

$$S_{x_1}(e^{j2\pi f/f_1}) = 0,1f_1(1 + \cos(2\pi f/f_1))$$

(b) La autocorrelación se obtiene antitransformando la densidad espectral de potencia.

$$R_{x_1}[k] = 0,1 \times (\delta[k] + 0,5\delta[k-1] + 0,5\delta[k+1])$$

(c) Hay varias formas de calcular la potencia, la más sencilla en este caso es evaluar la autocorrelación en  $k = 0$ .

$$R_{x_1}[0] = 0,1$$

(d) El modelo corresponde a considerar la cuantización como ruido blanco aditivo no correlacionado con la señal.

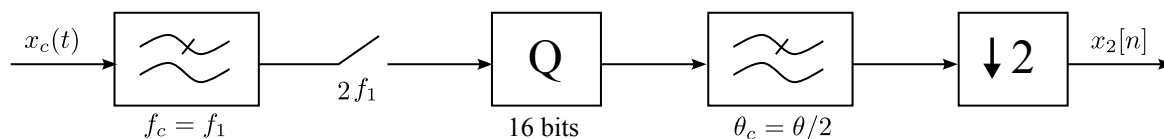
Considerando que el paso de cuantización es  $\Delta = \frac{2}{2^{16}}$ , la autocorrelación es entonces:

$$R_q[k] = \delta[k]\Delta^2/12$$

(e) Tenemos entonces que la SNR es:

$$SNR_1 = 0,1/(\Delta^2/12)$$

(f)



(g) En este caso es sencillo ver que la mitad de la potencia del ruido de cuantización es eliminada por lo que la nueva SNR es el doble de  $SNR_1$ .

## Problema 2

(a) La señal a la salida del modulador resulta:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= a_1v_1(t) + a_2v_1^2(t) \\ &= a_1(A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)) + a_2(A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t))^2 \\ &= [a_1 + 2a_2m(t)] A_c \cos(2\pi f_c t) + [a_1m(t) + a_2A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t) + a_2m^2(t)] \end{aligned}$$

donde el término  $s(t) = a_1 A_c \left[ 1 + \frac{2a_2}{a_1} m(t) \right] \cos(2\pi f_c t)$  corresponde a la señal AM a transmitir y el término  $i(t) = [a_1 m(t) + a_2 A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t) + a_2 m^2(t)]$  a la interferencia generada por el modulador. En la figura 2 se puede observar un bosquejo del espectro de  $v_2(t)$ .

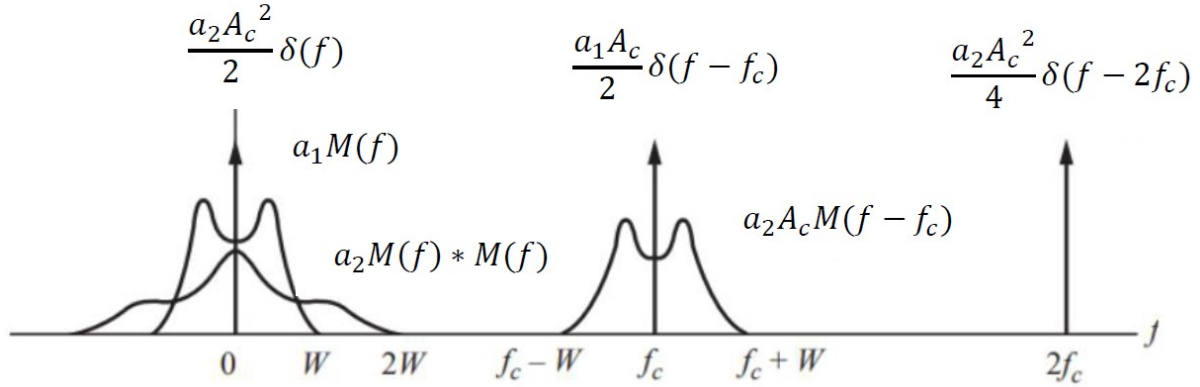


Figura 2: Bosquejo del espectro

(b) A partir del bosquejo anterior determinamos que la frecuencia central del filtro pasabanda debe ser  $f_c$  y su ancho de banda mínimo  $2W$ . Además, se puede observar que para que no haya superposición en el espectro se debe cumplir  $2W < f_c - W$ , es decir  $f_c > 3W$ .

(c) Para que no haya sobremodulación se debe cumplir que el índice de modulación sea menor a 1, por lo que eso implica que  $k_a = \frac{2a_2}{a_1} < 1$ .

(d) Ya sea que se elija un detector sincrónico o un receptor basado en detector de envolvente, la SNR resultante será la misma. En ambos casos, la componente de ruido que se recibe corresponde a la componente en fase, por lo que la potencia de ruido queda:

$$N = N_0/2 \cdot 2B_T = N_0/2 \cdot 2 \cdot 2W = 2N_0W$$

Por otro lado, la potencia de señal recibida corresponde a:

$$S = 4a_2^2 A_c^2 P \cdot 1/2 = 2a_2^2 A_c^2 P$$

. Finalmente, la relación señal a ruido está dada por el cociente:

$$SNR_D = S/N = \frac{2a_2^2 A_c^2 P}{2N_0W} = \frac{a_2^2 A_c^2 P}{N_0W}$$