Señales Aleatorias y Modulación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

25 de Julio de 2022

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta 1

1. Dar la expresión temporal de la señal transmitida $x_{AM}(t)$ y calcular la potencia de transmisión S_T, asumiendo que se envía un mensaje con potencia S_x.
2. Realizar el diagrama de bloques de un transmisor AM y de los dos posibles receptores: detector síncrono y de envolvente.

Considerar el caso en que se reciben dos señales moduladas en AM superpuestas en la misma f_c, situación que se daría por ejemplo si dos emisoras transmiten en la misma portadora.

3. Hacer el diagrama fasorial de la señal resultante (suma de las dos señales AM).
4. ¿Qué detectaría un receptor al sintonizar dicha f_c?¿Qué se escucharía?¿Sería diferente según cuál sea el tipo de receptor?

Pregunta 2

1. Definir un proceso estacionario en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS). ¿Bajo qué condiciones un proceso SSS es WSS? ¿Bajo qué condiciones un proceso WSS es SSS?
2. Enunciar y detallar la hipótesis del teorema de ergodicidad en media cuadrática. Dar al menos dos condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla.

Problema 1

Comunicarse con los astronautas del Apolo 11 a cientos de miles de kilómetros no era tarea sencilla. ¿Cómo funcionaban los radios usados en los viajes a la Luna? En este ejercicio se propone analizar algunos aspectos básicos del sistema FM usado en los 60s. El corazón de este complejo sistema era el procesador de premodulación, un componente clave que combinaba voz, datos científicos, señales de TV y telemetría para la transmisión a la Tierra. Fue construido solamente con componentes discretos (i.e. sin circuitos integrados) que fueron soldados y empaquetados herméticamente en una caja de 6.6 kg.

El Apolo 11 usaba para detectar la señal FM un discriminador basado en promedio de pulsos, convirtiendo primero los cambios de fase de la señal modulada en FM en pulsos de ancho fijo.

(a) Explicar conceptualmente y en pocas palabras, cómo promediando esta señal de pulsos de ancho fijo es posible obtener a la salida del detector la señal demodulada buscada. Puede resultar útil dibujar algún ejemplo de una señal modulada en FM y la salida correspondiente.

La voz se transmitía modulada en FM a la nave espacial, en una subportadora de 30kHz. Considerando una señal de audio de ancho de banda $W = 4$ kHz y potencia $S_x = 0.5$, y una desviación máxima en frecuencia $f_\Delta = 7.5$ kHz.

(b) Usando la regla de Carson, ¿cuál sería el ancho de banda estimado para la señal modulada en FM?

En caso de un mal funcionamiento, la comunicación de voz de respaldo podría transmitirse a la nave espacial a través de la subportadora de 70kHz (usada normalmente para datos).

(c) ¿Cuál sería el ancho de banda estimado para la señal modulada en FM en este caso?

Las comunicaciones entre el Apolo 11 y Tierra eran en la denominada Unified S-Band (USB[1]), en frecuencias cercanas a los 2.2GHz. La señales de voz, datos, TV, se combinaban usando modulación en fase (PM), debido a que mantiene la frecuencia bastante constante, lo que permitía medir la velocidad de la nave. A continuación haremos un cálculo simplificado del enlace entre la Tiera y la Luna (384400 km), asumiendo una modulación FM con los parámetros indicados previamente ($f_\Delta = 7.5$ kHz y mensaje de audio de ancho de banda $W = 4$ kHz y potencia $S_x = 0.5$). Como modelo de canal se utiliza la atenuación en espacio libre de Friis[2] y un ruido AWGN con DEP $\eta/2$, siendo $\eta = 10^{-15}$W/Hz. El requerimiento definido por la NASA era que como máximo el 10 % de las palabras tuvieran distorsión. Para lograr esto fue necesario instalar antenas gigantes de 85 pies ubicadas en distintas partes del mundo. Por lo tanto, una parte de la atenuación pora la distancia era compensada por dichas antenas, lo cual estimaremos en 50dB. Si el requerimiento de la NASA se traduce en una mínima $SNR_D = 5dB$:

(d) ¿Cuál es la mínima potencia de transmisión S_T necesaria para cumplir dicho requerimiento?

(e) ¿Cómo cambia el resultado para el caso en que la nave está en el espacio a 200km de la Tierra?

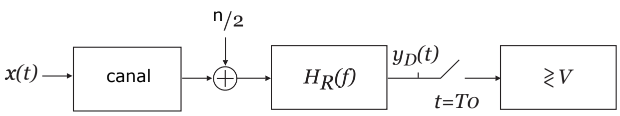
Problema 2

Se desea transmitir una señal aleatoria binaria con valores 0 y 1 equiprobables, independientes entre sí, por un canal que introduce ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. La señal se codifica en forma polar ('0' se codifica con $-A$ y '1' con A). A los pulsos se les da la siguiente forma:

$$p(t) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi t}{T_b}) & |t| < \frac{T_b}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde T_b es el tiempo de un bit. Se considera que el canal no distorsiona la forma de los pulsos transmitidos.

En el receptor se utiliza un filtro de respuesta en frecuencia $H_R(f)$ y el muestreo de cada pulso recibido se realiza en el instante óptimo. La siguiente figura esquematiza el proceso de detección:



Se pide:

(a) Expresar analíticamente la señal conformada y bosquejar un ejemplo de la señal.

(b) Encontrar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal. Bosquejar el espectro y dar una estimación de su ancho de banda.

(c) Diseñar $H_R(\omega)$ de forma de obtener la mínima probabilidad de error en detección. Calcular la SNR a la salida del muestreo y la probabilidad de error en este caso.

(d) Considerar ahora que se utiliza como filtro de recepción un pasabajos ideal con el menor ancho de banda B posible, de forma tal que no distorsiona los pulsos recibidos. Calcular la SNR a la salida del muestreo y la probabilidad de error P_e. Verificar que en este caso la probabilidad de error es mayor a la obtenida en la parte c.

[1]No confundir con el más popular actualmente *Universal Serial Bus.*

[2]Atenuación en espacio libre de Friis: $L(d) = (4\pi f_c d/c)^2$ siendo $c = 3 \times 10^8$m/s

Solución

Pregunta

1. Realizar el diagrama de bloques de un transmisor AM detallando la función de cada bloque.
2. $x_{AM}(t) = A_c(1 + \mu x(t))cos(2\pi f_c t + \theta)$.
3. $S_T = A_c^2/2 + A_c^2\mu^2 S_x/4$
4. Ver teórico.

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a) La señal de pulsos de ancho fijo corresponde a un tren de pulsos, donde habrá mayor concentración de pulsos para los tramos donde la señal modulada en FM tiene más cantidad de cruces por cero y viceversa. Esto es equivalente a decir que habrá más pulsos cuando la frecuencia instantánea sea mayor y viceversa. Por lo tanto, al promediar la señal de pulsos, obtendremos una salida suave, cuyo mayor valor indicará mayor frecuencia instantánea de la señal FM y viceversa. Por lo tanto, la salida será proporcional a la frecuencia instantántea de la señal modulada en FM, por lo que será también proporcional al mensaje original que había sido modulado en FM.

(b) $B_T = 2(f_\Delta + W) = 22kHz$

(c) El ancho de banda de la señal FM se mantiene, ya que no depende de la portadora f_c: $B_T = 2(f_\Delta + W) = 22kHz$

(d) $L_{\text{Friis}}(d = 384400\text{km}, f = 2.2\text{GHz}) = 211\text{dB}$
$L_{\text{efectivo}} = L_{\text{Friis}} - G_{\text{antenas}} = 161\text{dB}$

$SND_D = 3D^2 S_x\gamma$, siendo $\gamma = S_T/\eta L_{\text{efectivo}} B_T$
$\rightarrow S_T = \eta L_{\text{efectivo}} B_T SND_D/3D^2 S_x$
$S_T = 166.1kW$
Además se debe verificar que se cumple el umbral de FM: $SNR_R = S_T/\eta L_{\text{efectivo}} B_T > 10$.

(e) $L_{\text{Friis}}(d = 200\text{km}, f = 2.2\text{GHz}) = 145\text{dB}$
$L_{\text{efectivo}} = L_{\text{Friis}} - G_{\text{antenas}} = 95\text{dB}$

$SND_D = 3D^2 S_x\gamma$, siendo $\gamma = S_T/\eta L_{\text{efectivo}} B_T$
$\rightarrow S_T = \eta L_{\text{efectivo}} B_T SND_D/3D^2 S_x$ $S_T = 41.7mW$
Además se debe verificar que se cumple el umbral de FM: $SNR_R = S_T/\eta L_{\text{efectivo}} B_T > 10$.

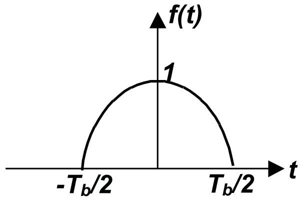
Problema 2

(a) La señal transmitida es una PAM:

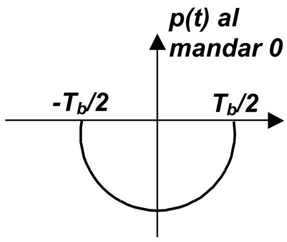
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n p(t - nT - \theta)$$

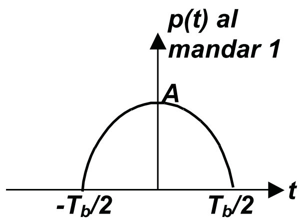
donde Z_n es una va. iid que toma valores A y -A de forma equiprobable.

La siguiente figura muestra la forma del pulso conformador $p(t)$:

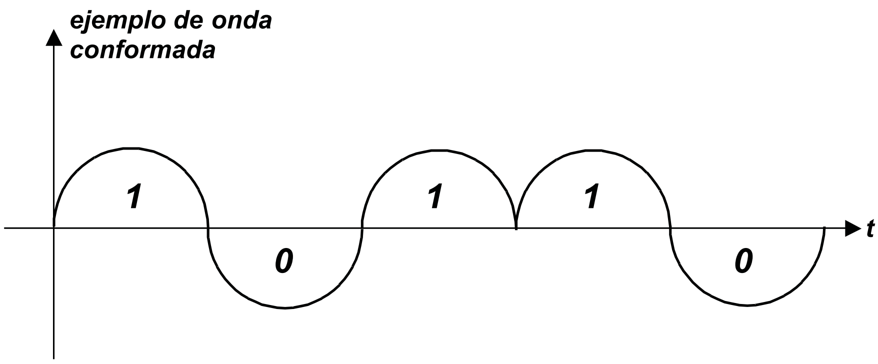


Luego, como se usa codificación polar, se tiene que el 0 se envía con amplitud $-A$, mientras el 1 se envía con amplitud A. La forma que tiene el pulso que representará el 0 y el 1 se muestran en las siguientes figuras.





Finalmente, un ejemplo de la onda conformada, es decir, la forma de la onda al mandar una cierta secuencia de 0's y 1's (en este caso se usó 10110), se muestra en la siguiente figura.



(b) Dado que X_t es una señal PAM, sabemos que su densidad espectral de potencia es de la forma:

$$S_X(f) = \frac{\sigma_a^2 |P(f)|^2}{T_b} + \frac{m_a^2}{T_b^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{k}{T_b}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

Calculamos la media de la señal, m_a, y su varianza, σ_a^2:

$$m_a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(-A) = 0$$

$$\sigma_a^2 = R_{a_k}(0) - m_a^2 = R_{a_k}(0) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}(-A)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow S_X(f) = \frac{A^2|P(f)|^2}{T_b}$$

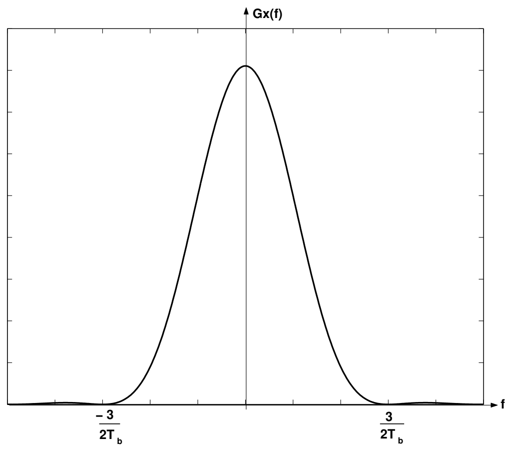
Como $p(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right).\Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$, se cumple que:

$$\begin{aligned} P(f) &= \left[\frac{\delta(f-1/2T_b)+\delta(f+1/2T_b)}{2}\right] * T_b.sinc(fT_b) \\ &= \frac{T_b}{2}\left[sinc(T_bf-1/2)+sinc(T_bf+1/2)\right] \end{aligned}$$

Entonces, la densidad espectral de potencia de X_t queda:

$$S_X(f) = \frac{A^2T_b\left|sinc(T_bf-1/2)+sinc(T_bf+1/2)\right|^2}{4}$$

La siguiente figura muestra un bosquejo de la forma de $S_X(f)$.



Una aproximación del ancho de banda de la señal trasmitida es $W \approx \frac{3}{2T_b}$

(c) El filtro $H_R(\omega)$ que minimiza la probabilidad de es el filtro apareado

$$h_R(t) = \frac{1}{T}p(t_d - t)$$

donde $p(t)$ es el pulso conformador de la señal transmitida y t_d tal que el filtro es causal. El valor mínimo que puede tomar t_d en este caso es de $T/2$
por lo tanto se tiene que:

$$h_R(t) = \frac{1}{T}p\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

La potencia del ruido en recepción:

$$N_R = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 G_n(f)df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H_R(f)|^2 df$$

Por Parseval:

$$N_R = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|h_R(t)|^2 dt = \frac{\eta}{2T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)^2 dt = \frac{\eta}{4T}$$

A la salida del muestredor tenemos que

$$S_R = E(|Z_n||p(t)||_2^2|^2) = \frac{A^2}{T^2}\left(\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)^2 dt\right)^2 = \frac{A^2}{4}$$

Por lo tanto:

$$SNR = \frac{A^2 T}{\eta}$$

Si se elige el umbral óptimo $V = 0$, $P_e = Q\left(\sqrt{SNR}\right) = Q\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{\eta}{T}}}\right)$

(d) En este caso, como el canal y el receptor no distorsionan los pulsos, las muestras toman los valores A y $-A$ cuando se envía un 1 y un 0 respectivamente. La potencia del ruido en este caso es $N_R = \eta W = \eta \frac{3}{2T}$ La probabilidad de error, P_e, está dada por:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{3\eta}{2T}}}\right)$$

La probabilidad de error en este caso es mayor que la del caso anterior.