

# Señales aleatorias y modulación

## Examen - Parte II

Instituto de Ingeniería Eléctrica

28 de julio de 2021

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 2

Una señal de voz  $x(t)$  de rango dinámico  $[-1,1]$ , potencia  $S_x = 3 \text{ Watts}$  y ancho de banda  $W = 3,4 \text{ kHz}$  es muestreada a una frecuencia  $f_s = 8 \text{ kHz}$ . La señal se transmite por un canal ideal (que no introduce ruido ni distorsiona la señal) utilizando un sistema PCM (Pulse-code modulation) binario, con cuantificación uniforme de ancho  $q$  y codificación de  $n$  bits. Las siguientes figuras representan el diagrama de bloques del sistema.

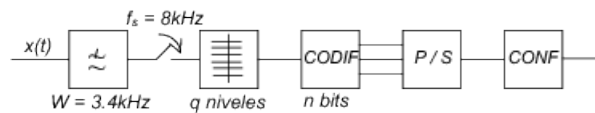


Fig 1. Transmisor.

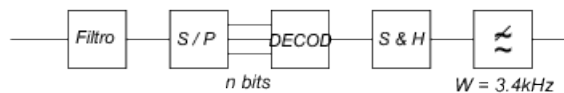


Fig 2. Receptor.

Se desea diseñar el sistema mas simple que permita recibir la señal con una  $SNR_D$  de 60 dB.

- (a) Determinar los parámetros de funcionamiento del sistema ( $q$  y  $n$ ). Dar criterios de elección de los mismos. (Asumir que se cumple el modelo simplificado del ruido de cuantificación)
- (b) ¿Bajo qué hipótesis el modelo anterior es válido?

Suponer ahora que el codificador es de 8 bits.

- (c) ¿Qué modificación de diseño puede hacerse para cumplir con el requerimiento de  $SNR_D$ ? ¿Se tiene alguna desventaja?.

La señal binaria transmitida por el canal es una PAM con pulso conformador  $\Pi(t)$  rectangular de ancho  $T = 1/(nf_s)$ , para el bit '1' se envía  $A\Pi(t)$  y para el bit '0'  $-A\Pi(t)$ . La probabilidad de transmitir un '1' es  $p$ . Considerar ahora que el canal introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano, con una densidad espectral de potencia  $\eta/2$  y que el ruido de cuantificación es despreciable. En el instante de muestreo la amplitud de la señal recibida es  $A_R$ .

- (d) Esbozar el espectro de la señal conformada para una probabilidad  $p$  genérica. ¿Cómo afecta  $p$  la forma del espectro?
- (e) Deducir una expresión para la probabilidad de error  $P_e$ , suponiendo un filtro de recepción LPF de ancho de banda  $B_T$ , para  $p$  cualquiera. Suponer que el filtro de recepción no distorsiona los pulsos recibidos.
- (f) Diseñar el filtro de recepción óptimo que maximiza la SNR en detección. ¿Cómo cambiaría el diseño del receptor si el ruido no es blanco y tiene una  $S_N(f)$  dada? Interpretar el resultado.

## Pregunta 2

Procesos Estocásticos.

1. Definir un proceso estocástico en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS).
2. Enunciar y detallar la hipótesis del teorema de ergodicidad en media cuadrática. Dar al menos dos condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla.

# Solución

## Problema 2

(a) Para poder garantizar un valor dado de  $\text{SNR}_D$  (que tomaremos igual a  $\text{SNR}_D^*$ ), se deberá cumplir que:

$$\text{SNR}_D^* \leq \frac{6S_x f_s}{q^2 W} \Rightarrow q \leq \sqrt{\frac{6S_x f_s}{\text{SNR}_D^* W}}$$

Como se debe cumplir que  $2/q \leq 2^n$ , luego se tiene que:

$$n \geq \log_2(2/q) = \log_2 \left( \sqrt{\frac{\text{SNR}_D^* \cdot 2W}{3S_x \cdot f_s}} \right)$$

Dado que  $n$  debe ser un número natural, se desprende que el valor de  $n$  es  $\left\lceil \log_2 \left( \sqrt{\frac{\text{SNR}_D^* \cdot 2W}{3S_x \cdot f_s}} \right) \right\rceil = 9$ .

(b) Ver teórico.

(c) Se puede sobremuestrear la señal. Si  $f_s = 16$  kHz,  $n = 8$ . Como contrapartida la tasa de transmisión de la señal transmitida por el canal aumenta al doble.

(d) La señal conformada,  $x_c(t)$ , es una señal PAM, por lo que su espectro es de la forma:

$$S_{x_c}(f) = \frac{\sigma_x^2 |P(f)|^2}{T} + \frac{m_x^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

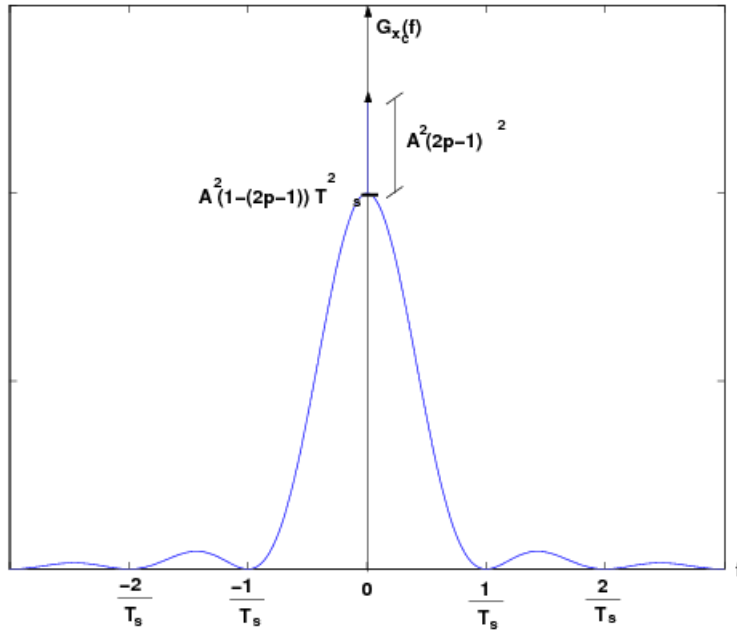
donde:

$$\begin{aligned} m_x &= A \cdot p + (-A) \cdot (1-p) = A \cdot (2p-1) \\ \sigma_x^2 &= R_x[0] - m_x^2 = A^2 \cdot p + (-A)^2 \cdot (1-p) - A^2(2p-1)^2 = A^2(1 - (2p-1)^2) \\ |P(f)|^2 &= T^2 \text{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

De la forma de  $|P(f)|^2$  se desprende que  $|P(k/T)|^2 = T^2$  si  $k = 0$ , y  $|S(k/T)|^2 = 0$  en otro caso (considerando  $k$  entero). Por lo tanto, la densidad espectral de potencia de la señal conformada queda:

$$\begin{aligned} S_{x_c}(f) &= \frac{A^2(1 - (2p-1)^2)}{T} T^2 \text{sinc}^2(fT) + \frac{A^2(2p-1)^2}{T^2} T^2 \delta(f) \\ &= A^2(1 - (2p-1)^2) T \text{sinc}^2(fT) + A^2(2p-1)^2 \delta(f) \end{aligned}$$

Esta función tiene la forma:



El valor de  $p$  afecta a los valores de  $m_x$  y  $\sigma_x$ . Específicamente, si  $p = 1/2$ , entonces  $m_x = 0$  y no se tiene una delta en  $f = 0$  en el espectro, la cual no aportaba información. Esto es deseable ya que permite ahorrar potencia de transmisión, que antes era emitida pero no aprovechada. Con este valor de  $p$ ,  $S_{x_c}(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT)$ .

(e) En recepción lo que se tiene son dos campanas gaussianas centradas en  $A_R$  y  $-A_R$ , de ancho  $\sigma$  y ponderadas por  $p$  y  $(1-p)$ .

Si  $V$  es el umbral de decisión, entonces:

$$P_e = p \cdot Q\left(\frac{A_R - V}{\sigma}\right) + (1-p) \cdot Q\left(\frac{-A_R + V}{\sigma}\right)$$

Como  $\sigma^2 = \eta B_T$ , entonces  $\sigma = \sqrt{\eta B_T}$ , y por lo tanto:

$$P_e = p \cdot Q\left(\frac{A_R - V}{\sqrt{\eta B_T}}\right) + (1-p) \cdot Q\left(\frac{-A_R + V}{\sqrt{\eta B_T}}\right)$$

(f) El filtro óptimo es el filtro apareado:

$$H(f) = k \cdot P^*(f) \cdot e^{-j2\pi f t_d}$$

donde  $k$  es una constante arbitraria y  $t_d$  es elegido de forma tal que el filtro sea causal (en este caso, debe cumplirse  $t_d \geq T$ ).

Si ahora el ruido es gaussiano pero no blanco, el filtro queda de la forma  $H(f) = \frac{k' \cdot P^*(f) \cdot e^{-j2\pi f t_d}}{G_n(f)}$ .

Se puede apreciar que este filtro realiza un de-énfasis en aquellas frecuencias en las que está presente el ruido, mientras que enfatiza las frecuencias en las que está presente el pulso.

## Pregunta