Señales Aleatorias y Modulación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

6 de Agosto de 2020

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Se trasmite una señal binaria que toma valores 0 y A correspondientes a 0 y 1 lógicos en forma equiprobable e independiente de los valores anteriores por un canal con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.

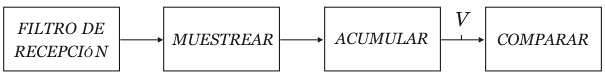
El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda B. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(a) Si llamamos v a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_v(v|0)$, probabilidad de la señal v cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_v(v|1)$ para el 1 lógico.

(b) Especificar los momentos estadísticos de interés.

(c) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error. Calcular la potencia media de la señal trasmitida.

Se supone que cada dígito se trasmite m **veces consecutivas**. El receptor las suma antes del comparador según el esquema de la siguiente figura.



(d) Hallar las densidades de probabilidad $p_v(v|0)$, $p_v(v|1)$, especificando los momentos estadísticos. Graficar las densidades de probabilidad y comparar con el caso anterior.

(e) Elegir el umbral de decisión, calcular la probabilidad de error y la potencia media transmitida.

(f) Explicar cómo, manteniendo una misma probabilidad de error en el segundo esquema, la amplitud A puede ser menor que en el primer esquema. ¿Esto implica alguna mejora? ¿Tiene contrapartida?

Problema 2

Para la vuelta del fútbol profesional de AUF en el marco de la situación de emergencia sanitaria, no estará permitido que haya gente a nivel de cancha que no pertenezca a los planteles o cuerpos técnicos, salvo los árbitros claro está. Para controlar esto se dispondrá de un servicio de seguridad, que utilizará una solución de intercomunicadores. Se desea analizar y diseñar esta solución, que permita la comunicación de voz entre los integrantes de la seguridad durante los partidos. El reglamento de FIFA define las dimensiones de las canchas, con un largo entre 90 y 120 metros, y un ancho entre 45-90 metros.

Este sistema debe operar en la banda de UHF, en frecuencias libres sub-GHz comprendidas entre 920.4 MHz y 921.8 MHz. La modulación a utilizar será FM con una desviación de frecuencia $f_\Delta = 75$ kHz y una mínima SNR_D de 40 dB. La única atenuación a considerar es la del aire, la cual se modela en forma simplificada como: $L_{aire}(d) = L_0 + \alpha_a(d - 10)$, con $\alpha_a = 0.3$ dB/m y $L_0 = 40$ dB. Se desprecia tanto la ganancia de las antenas, así como otras pérdidas en cables y conectores. Además el amplificador de recepción introduce un ruido AWGN con $\eta_A = 10^{-15}$ W/Hz.

(a) Hallar el ancho de banda del audio máximo que se puede utilizar para tener 4 canales con una separación mínima de 200 kHz. Indicar el ancho de banda de la señal FM resultante para cada canal y las frecuencias centrales de los canales.

(b) Si se trabaja con un ancho de banda del audio de 10 kHz y una separación entre canales de 100 kHz ¿cuántos canales podrían operar en este caso?

En el proceso de diseño se define un ancho de banda de audio de $W = 15$ kHz y una potencia de señal $S_x = 0.5$. A partir de dichos parámetros se le encomienda el cálculo de la mínima potencia de transmisión necesaria.

(c) Hallar la máxima atenuación posible, considerando el peor caso que podría darse.

(d) Determinar la mínima potencia de transmisión para que el sistema opere correctamente.

Pregunta 1

`Procesos Estocásticos.`

1. Definir un proceso estocástico en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS).

2. Sea X_t un proceso WSS con autocorrelación $R_X(\tau)$ y Y_t la salida de un filtro LTI, estable, de respuesta en fecuencia $H(f)$ y entrada X_t. Obtener la autocorrelación $R_Y(\tau)$ y la autocorrelación cruzada R_{XY}.

3. ¿El poceso Y_t es WSS? Justificar

Pregunta 2

`Modulación analógica AM.`

1. Realizar el diagrama de bloques de un transmisor AM detallando la función de cada bloque.

2. Dar la expresión temporal de la señal transmitida $x_{AM}(t)$.

3. Calcular la potencia de las bandas laterales S_{bl} y de la portadora S_c, asumiendo que se transmite un mensaje con potencia S_x.

4. Realizar el diagrama de bloques de los posibles receptores: detector síncrono y de envolvente.

5. Dado que la modulación AM es lineal, y por tanto cumple con el principio de superposición, ¿qué implicancias tiene esto cuando se reciben dos señales AM superpuestas? Pensar por ejemplo en el caso de dos emisoras de radios transmitiendo en la misma portadora, ¿qué detectaría un receptor sintonizando dicha frecuencia?¿qué se escucharía?¿Existe alguna diferencia según cuál sea el tipo de receptor?

Solución

Problema 1

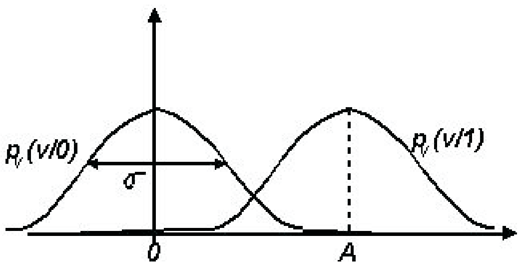
(a) Sé que a la entrada del comparador, la señal v es de la forma $v[k] = x[k] + n[k]$, donde x es la señal que se envió, y n representa el ruido.

Por lo tanto, si se transmitió un 0, se tiene que $v[k] = n[k]$ y si se transmitió un 1, $v[k] = A + n[k]$.

Se ve que si no hubiera ruido, la densidad de probabilidad de v serían dos deltas, una en 0 y otra en A, pero como hay presencia de ruido blanco gaussiano, lo que se tiene en realidad es de la forma:

$$\begin{aligned} p_V(v|0) &= p_N(v) \\ p_V(v|1) &= p_N(v-A) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la figura siguiente.



(b) Los momentos estadísticos de interés son la media de las gaussianas, y su varianza.

La primera está dada por el valor en el cual se centran las curvas: las medias son 0 y A.

La segunda está relacionada con el "ancho" de las mismas: ambas tienen varianza σ^2.

(c) Sea u el umbral óptimo de decisión. Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}} .P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}} .P_{e1} \Rightarrow P_{e,min} / \left.\frac{\partial P_e}{\partial v}\right|_{min} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} P_{e0} &= \int_u^{+\infty} p_V(v|0)dv \\ P_{e1} &= \int_{-\infty}^u p_V(v|1)dv \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial P_{e0}}{\partial v}}_{p_V(u|0)} + \underbrace{\frac{\partial P_{e1}}{\partial v}}_{-p_V(u|1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow p_V(u|0) = p_V(u|1) \Leftrightarrow u = \frac{A}{2}$$

Luego la probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Por otro lado, $S_R = A^2.P_A + 0^2.P_0 = \frac{A^2}{2}$, y $N_R = \sigma^2$, con lo que $\frac{A}{2\sigma} = \sqrt{SNR_R/2}$, y entonces:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{SNR_R}{2}}\right)$$

(d) Al repetirse cada dígito m veces consecutivas, a la entrada del comparador se tiene la señal $v'[k]$ igual a:

$$v'[k] = x[k] + n[k] + x[k-1] + n[k-1] + \ldots + x[k-m+1] + n[k-m+1] = mx[k] + n'[k]$$

Luego, si transmití un 0, tendré que $v'[k] = n'[k]$, mientras que si transmití un 1, $v'[k] = mA + n'[k]$.

Siendo $n'[k]$ es la suma de ruido blanco de media nula y varianza σ^2.

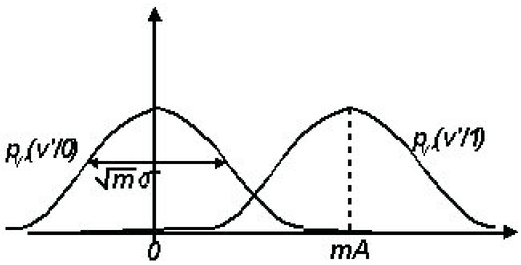
Observar que no podemos suponer que el ruido $n[k], n[k-1], ..., n[k-m+1]$ sean independientes entre si. Para poder asegurar lo anterior, debemos verificar que la autocorrelación del rudio muestreado a frecuencia f_s es una delta (es decir que es un proceso blanco), lo cual en principio no resulta evidente ya que el ruido muestreado no es blanco, dado que fue previamente recortado por el filtro pasabajos.

Por lo anterior, $G_n(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$, y por lo tanto su autocorrelación es $R_n(\tau) = \eta.B.sinc(2B\tau)$. Dada la forma de $sinc(2B\tau)$, función que se anula en los múltiplos de $1/2B$, se tiene entonces que la máxima frecuencia de muestreo que puede usarse es justamente de $2B$, pudiéndose emplear alternativamente frecuencias de valor $2B/n$, con n entero. De esta forma, la autocorrelación del proceso ruido muestreado es una delta y podemos garantizar la independencia de los distintos instantes de ruido.

Por lo tanto, podemos suponern que los $n[i]$ son independientes con lo cual la varianza de $n'[k]$ es igual a $m.\sigma^2$, y su media es la suma de las medias de cada $n[i]$, que vale 0. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} p_{V'}(v'|0) &\sim N(0, \sqrt{m}\sigma) \\ p_{V'}(v'|1) &\sim N(mA, \sqrt{m}\sigma) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la siguiente figura.



(e) Nuevamente, dado que la forma de las dos curvas de densidad de probabilidad es idéntica, se cumple que el umbral óptimo es equidistante de las dos medias, y por lo tanto vale:

$$u = \frac{mA + 0}{2} = \frac{mA}{2}$$

Entonces, se cumple que:

$$P_e = Q\left(\frac{mA}{2\sqrt{m}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{m}A}{2\sigma}\right) < Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

La potencia transmitida en este caso es la misma que en el caso anterior, ya que existe la misma probabilidad de enviar 0 y 1, y por lo tanto:

$$S_T = \frac{1}{2}.A^2 + \frac{1}{2}.0^2 = \frac{A^2}{2}$$

(cabe notar que a lo largo de todo este ejercicio se supuso un canal sin atenuación por lo que $S_T = S_R$).

(f) Para mantener la P_e del primer esquema, se debe cumplir que:

$$\frac{\sqrt{m}A'}{2\sigma} = \frac{A}{2\sigma} \Rightarrow A' = \frac{A}{\sqrt{m}}$$

La **mejora** consiste en que la potencia transmitida, S'_T, igual a $\frac{A'^2}{2} = \frac{A^2}{2m}$, es menor que la anterior.

Sin embargo, esta opción tiene como **contrapartida** que demora m veces más tiempo en transmitir la misma información (es decir, el flujo de información disminuye).

Si quisiera mantener el flujo de información, entonces tendría que aumentar la cadencia. La nueva cadencia será $r' = mr = m/T$, y por lo tanto el ancho de banda mínimo también deberá ser mayor: $B'_{mín} = r' = mr = B_{mín}$.

Problema 2

(a) Teniendo un ancho de banda total de 1.4 MHz, de los cuales 600 kHz quedan para la separación entre canales, se deduce que el ancho de banda máximo de cada canal debe ser $B_{max} = 800$ kHz$/4 = 200$ kHz.
De allí se deduce cuál puede ser el máximo ancho de banda del audio a utilizar: $B = 2(D+2)W$ con $D = \frac{f_\Delta}{W}$, por lo que tenemos: $W_{max} = \frac{B_{max}-2f_\Delta}{4}$ con $B_{max} = 200$ kHz.
Despejando se tiene $W_{max} = 12.5$ kHz.
Las frecuencias centrales de los canales resultantes quedan 920.5 MHz, 920.9 MHz, 921.3 MHz y 921.7 MHz respectivamente.

(b) Ahora $W = 10$ kHz por lo que mediante $B = 2(f_\Delta + 2W)$ se llega a que $B = 190$ kHz.
Con 4 canales se tiene que las separaciones suman un total de 300 kHz, y el ancho de banda total queda en 1.060 MHz.
Si son 5 canales, las guardas suman 400 kHz, y el ancho de banda total queda en 1.350 MHz.
De esa forma llegamos a un máximo de 5 canales, ya que con 6 canales nos pasamos del total de 1.4 MHz disponible.

(c) El peor caso corresponde a la distancia máxima dentro de un campo de juego, las cuales se dan en las diagonales de extremo a extremo, considerando a su vez las máximas dimensiones posibles según FIFA, es decir largo de 120 metros y ancho de 90 metros. Esto determina una distancia máxima en la diagonal de 150 metros, lo cual nos da una atenuación máxima de 82 dB.

(d) Para FM la SNR$_D$ está dada por $3D^2S_x\gamma$ siendo $\gamma = \frac{S_T}{\eta LW}$.
Despejando la potencia y haciendo el cálculo, llegamos al valor mínimo de $S_T = 634$ mW.
Además, es necesario verificar el umbral de FM, dado por $SNR_R = \frac{S_T}{\eta LB} => 10$, que en este caso se verifica para el valor de S_T mínimo calculado previamente.

Pregunta

Pregunta

1. Realizar el diagrama de bloques de un transmisor AM detallando la función de cada bloque.
2. $x_{AM}(t) = A_c(1+\mu x(t))cos(2\pi f_c t + \theta)$.
3. $S_{bl} = A_c^2\mu^2 S_x/4$; $S_c = A_c^2/2$.
4. Realizar el diagrama de bloques de los posibles receptores: detector síncrono y de envolvente.
5. Es de esperar que en general se escuchen ambos mensajes superpuestos. Si se utiliza un detector sincrónico y ambas señales tienen diferencias de fase, el detector no podrá sincronizar su fase con ambas, por lo que según la diferencia que haya entre ellas esto podría afectar a la otra. En el caso del detector de envolvente no importa la diferencia de fase, por lo que se escucharían ambos superpuestos, siempre que ambos se reciban por encima del umbral.