Señales Aleatorias y Modulación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de Febrero de 2024

Indicaciones:

- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas. Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta 1

1. Dibujar un diagrama de bloques de un cuantizador no uniforme por compansión.
2. Explicar cuáles son los objetivos de este tipo de cuantizador, cómo se alcanzan, y para qué tipo de señales es ventajoso frente a un esquema de cuantización uniforme.

Pregunta 2

Se desea implementar un receptor superheterodino que permita sintonizar una señal AM de ancho de banda W en el rango de frecuencias entre f_L y f_H.

1. Dar un diagrama de bloques del receptor.
2. Explicar qué es la frecuencia imagen, cuándo aparece y cómo logra evitarse.
3. Indicar los rangos de frecuencias que debe cubrir el oscilador local ¿Qué criterio usaría para seleccionar uno de ellos? ¿Por qué?
4. Describir las características de los filtros de preénfasis y deénfasis e indicar su utilidad. ¿Por qué no se utilizan dichos filtros para modulación lineal?

Problema 1

Considerar un proceso $X(t)$ definido por

$$X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t \quad -\infty < t < \infty$$

donde ω es constante y U y V son variables aleatorias.

(a) Calcular la media y la autocorrelación de $X(t)$

(b) Mostrar que la condición

$$E(U) = E(V) = 0$$

es necesaria para que $X(t)$ sea estacionario.

(c) Mostrar que $X(t)$ es WSS si y solo si U y V son procesos no correlacionados con igual varianza; esto es,

$$E(UV) = 0 \quad E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) = \sigma^2$$

Considerar ahora que U y V son independientes, cada una de las cuales toma valores -2 y 1 con probabilidades $1/3$ y $2/3$, respectivamente.

(d) Mostrar que $X(t)$ es WSS pero no SSS.

(e) ¿Es $X(t)$ ergódico en media y en autocorrelación? Justificar

Problema 2

Se desea diseñar un micrófono inalámbrico para espectáculos en salas de teatro. El micrófono debe operar en la banda de UHF y trabajar con modulación en frecuencia (FM). La banda asignada para operar es [530 - 535] MHz y se debe mantener una guarda de 10 kHz entre canales. La señal de audio a transmitir tiene ancho de banda $W = 20$ kHz y potencia $S_x = \frac{1}{2}$. Se transmite con potencia de transmisión S_T y la desviación en frecuencia f_Δ debe estar en el rango [40, 60] kHz. El medio de transmisión es el aire y se considera el siguiente modelo de canal:

- Atenuación (dB): $L(d) = L_0 + \alpha d$, con $\alpha = 0.25$ dB/m y $L_0 = 50$ dB.

El receptor introduce ruido AWGN con densidad espectral de potencia (DEP) constante $G(f) = \eta/2$, con $\eta = 10^{-13}$ W/Hz, y tiene ganancia $g = L(d)$, siendo d la distancia entre el receptor y el transmisor.

(a) Diseñar f_Δ de manera de maximizar el número de canales dentro de la banda asignada. Calcular el ancho de banda de cada canal B y el número total de canales n_C.

(b) Hallar la potencia de ruido en detección $N(d)$ cuando el transmisor está a una distancia d.

(c) Hallar la relación señal a ruido en detección $\mathrm{SNR}_D(d)$ cuando el transmisor está a una distancia d.

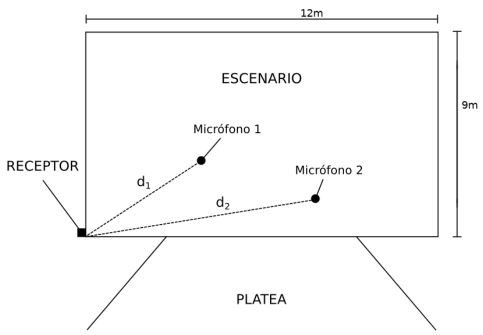
En recepción es se necesita un audio de alta fidelidad, lo que implica lograr una $\mathrm{SNR}_D \geq 30$dB.

(d) Calcular la mínima potencia de transmisión S_T para cumplir con este requerimiento desde cualquier lugar del escenario.

Cuando se trabaja con varios micrófonos a la vez, se utilizan en simultáneo varios canales diferentes dentro de la banda. Asumir que se trabaja con dos micrófonos como se muestra en la figura.

(e) Si ambos micrófonos operan con la misma S_T, ¿cuál es la máxima relación (diferencia en dB) entre las SNR_D de ambos que puede haber?

(f) Si las distancias de ambos micrófonos al receptor son distintas, ¿existe diferencia entre las potencias de las señales de audio recibidas? Justificar la respuesta.



Solución

Pregunta

Ver teórico.

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a)

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E(U)\cos\omega t + E(V)\sin\omega t \tag{1}$$

$$\begin{aligned} R_X(t,t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= E\{(U\cos\omega t + V\sin\omega t)[U\cos\omega(t+\tau) + V\sin\omega(t+\tau)]\} \\ &= \frac{1}{2}[E(U^2) + E(V^2)]\cos\omega\tau + E(UV)\sin(2\omega t + \omega\tau) \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Si $X(t)$ es estacionario entonces la media no depende del tiempo, i. e.

$$\mu_X(t) = \mu_X = cte.$$

De la ec. (**??**) se observa que esto se cumple sólo si $E(U) = E(V) = 0$

(c) Si $X(t)$ es WSS, entonces

$$E\left[X^2(0)\right] = E\left[X^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = R_{XX}(0) = \sigma_X^2$$

pero $X(0) = U$ y $X(\pi/2\omega) = V$; entonces

$$E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) = \sigma_X^2 = \sigma^2$$

Usando el resultado anterior y la ec. (**??**), se obtiene

$$R_X(t,t+\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau + E(UV)\sin(2\omega t + \omega\tau)$$

el cual es función de τ sólo si $E(UV) = 0$.

En el sentido inverso, si $E(UV) = 0$ y $E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) = \sigma^2$ y utilizando los resultado obtenido en la parte (a), tenemos que

$$R_X(t,t+\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau + E(UV)\sin(2\omega t + \omega\tau)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= 0 \\ R_X(t,t+\tau) &= \sigma^2\cos\omega\tau = R_X(\tau) \end{aligned}$$

por lo que $X(t)$ es WSS.

(d) Se tiene que

$$E(U) = E(V) = \tfrac{1}{3}(-2) + \tfrac{2}{3}(1) = 0$$
$$E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) = \tfrac{1}{3}(-2)^2 + \tfrac{2}{3}(1)^2 = 2$$

Como U y V son independiente,

$$E(UV) = E(U)E(V) = 0$$

Entonces, utilizando los resultados de las partes anteriores $X(t)$ es WSS. Para ver que $X(t)$ no es SSS, consideraremos $E\left[X^3(t)\right]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} E\left[X^3(t)\right] &= E\left[(U\cos t + V\sin t)^3\right] \\ &= E\left(U^3\right)\cos^3 t + 3E\left(U^2V\right)\cos^2 t\sin t + 3E\left(UV^2\right)\cos t\sin^2 t + E\left(V^3\right)\sin^3 t \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} &E\left(U^3\right) = E\left(V^3\right) = \frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{2}{3}(1)^3 = -2 \\ &E\left(U^2V\right) = E\left(U^2\right)E(V) = 0 \quad E\left(UV^2\right) = E(U)E\left(V^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$E\left[X^3(t)\right] = -2\left(\cos^3 t + \sin^3 t\right)$$

el cual es función de t. Como todos los momentos de un proceso SSS deben ser independientes del tiempo, se deduce que $X(t)$ no es SSS.

(e)

$$\begin{aligned} \langle X(t)\rangle_T &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[U\cos(\omega t) + V\sin(\omega t)]\,dt \\ &= \frac{1}{2T\omega}[U\sin(\omega t) - V\cos(\omega t)]\Big|_{t=-T}^{T} \xrightarrow{T\to+\infty} 0 = \mu_X \\ \langle R_X(\tau)\rangle_T &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[U\cos(\omega t) + V\sin(\omega t)][U\cos(\omega(t+\tau)) + V\sin(\omega(t+\tau))]dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{U^2+V^2}{2}\cos\omega\tau + UV\sin\omega(2t+\tau)\right]dt \\ &= \frac{U^2+V^2}{2}\cos(\omega\tau) - \left[\frac{1}{2T}\frac{\cos\omega(2t+\tau)}{2\omega}\right]_{t=-T}^{T} \xrightarrow{T\to+\infty} \frac{U^2+V^2}{2}\cos(\omega\tau). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\lim_{T\to+\infty} E[|\langle X(t)\rangle_T - \mu_X|^2] = 0$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{T\to+\infty} E[|\langle R_X(\tau)\rangle_T - R_X(\tau)|^2] &= E\left[\left|\frac{U^2+V^2}{2}\cos\omega\tau - \sigma^2\cos\omega\tau\right|^2\right] \\ &= \{\left[E(U^4) + E(V^4)\right]/4 - \sigma^2/2\}\cos\omega\tau = \cos\omega\tau \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces $X(t)$ es ergódico en la media pero no ergódico en la autocorrelación.

Problema 2

(a) Para los valores posibles de f_Δ y con $W = 20$ kHz se tiene $D = \frac{f_\Delta}{W} \in [2,3]$. Aplicando la regla de Carson se calcula el ancho de banda de un canal:

$$B = 2(D+2)W \in [160, 200]\text{kHz}.$$

Para maximizar el número de canales se debe elegir el f_Δ que resulte en el mínimo ancho de banda para cada canal. De esta forma se tiene $f_\Delta = 20$ kHz, $D = 2$ y $B = 160$ kHz.
Para encontrar el número total de canales n_C, la banda asignada debe ser:

$$B_{total} \geq n_C \cdot B + (n_C - 1)\cdot G$$

siendo $B_{total} = 5\text{MHz}$ y $G = 10\text{kHz}$ la guarda entre canales. Despejando se tiene:

$$n_C \leq \frac{B_{total} + G}{B + G}$$

Sustituyendo por los valores anteriores se llega a que el máximo es $n_C = 29$.

(b)

$$N(d) = \int_{-W}^{W} f^2 \frac{\eta}{2S_R} df = \frac{\eta}{3S_R} W^3 = \frac{\eta L(d)}{3S_T} W^3$$

(c)

$$\text{SNR}_D(d) = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta L(d) W}$$

(d) Se deben cumplir las condiciones de SNR_D y umbral (SNR_R) para toda distancia d.

$$\text{SNR}_D(d) = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta L(d) W} \geq 10^3$$

$$\text{SNR}_R(d) = \frac{S_T}{\eta L(d) B} \geq 10$$

En particular el peor caso corresponde a $d = 15$ m del cual se despejan las condiciones para la potencia de transmisión:

$$S_T \geq 10^3 \frac{\eta L(15) W}{3D^2 S_x} \approx 79 \text{ mW}$$

$$S_T \geq 10 \eta L(15) B \approx 37.9 \text{ mW}$$

De esto se deduce que la mínima potencia de transmisión para estar siempre por encima de los 30 dB en recepción es $S_T = 79$ mW.

(e)

$$\text{SNR}_D(0) - \text{SNR}_D(15) = L(15) - L(0) = 3.75\text{dB}$$

(f) La potencia recibida sería $S_D = f_\Delta^2 \cdot S_x$ en ambos casos, por lo que no hay diferencia entre los micrófonos. Podría ser necesario de todas formas ajustar los volúmenes según el contenido de audio particular de cada micrófono (ej: un instrumento o una voz).