

Señales Aleatorias y Modulación

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

24 de febrero de 2023

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta 1

Se debe enviar una secuencia binaria X_k iid, donde los símbolos 0 y 1 ocurren con probabilidades $1 - p$ y p . La secuencia se envía mediante una PAM, donde las amplitudes que se utilizan son $-A$ y A respectivamente. El canal por el que se envía la PAM tiene la respuesta en frecuencia $C(f)$ que se muestra en la figura 1.

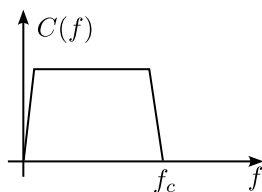


Figura 1

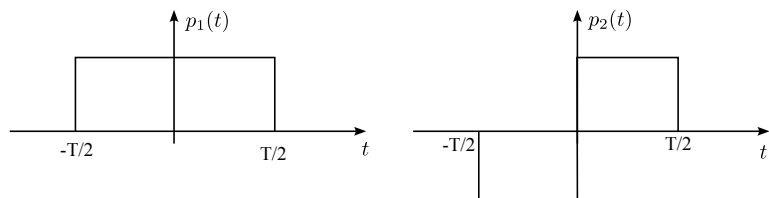


Figura 2

Se considera los pulsos conformadores $p_1(t)$ y $p_2(t)$ que se muestran en la figura 2.

- (a) Dar una expresión de la autocorrelación de X_k .
- (b) Dar la expresión de la densidad espectral de potencia para ambos pulsos ($p_1(t)$ y $p_2(t)$).
- (c) Indicar, dadas las características del canal, cuál de los pulsos elegiría si $p = 1/2$. Justificar.
- (d) Indicar, dadas las características del canal, cuál de los pulsos elegiría si $p = 1/4$. Justificar.

Pregunta 2

1. Dar la expresión temporal de la señal transmitida $x_{AM}(t)$ y calcular la potencia de transmisión S_T , asumiendo que se envía un mensaje con potencia P . Indicar la potencia de las bandas laterales S_{bl} y de la portadora S_c .
2. Dado que la modulación AM es lineal, y por tanto cumple con el principio de superposición, ¿qué pasa cuando se reciben dos señales AM superpuestas, por ejemplo si dos emisoras AM transmiten en la misma portadora? ¿Cómo queda el diagrama fasorial de la señal resultante y qué se escucharía con un receptor sintonizando dicha frecuencia? ¿Existe alguna diferencia según cuál sea el tipo de receptor?

Problema 1

Comunicarse con los astronautas del Apolo 11 a cientos de miles de kilómetros no era tarea sencilla. ¿Cómo funcionaban los radios usados en los viajes a la Luna? En este ejercicio se propone analizar algunos aspectos básicos del sistema FM usado en los 60s. El corazón de este complejo sistema era el procesador de premodulación, un componente clave que combinaba voz, datos científicos, señales de TV y telemetría para la transmisión a la Tierra. Fue construido solamente con componentes discretos (i.e. sin circuitos integrados) que fueron soldados y empaquetados herméticamente en una caja de 6.6 kg.

El Apolo 11 usaba para detectar la señal FM un discriminador basado en promedio de pulsos, convirtiendo primero los cambios de fase de la señal modulada en FM en pulsos de ancho fijo.

- (a) Explicar conceptualmente y en pocas palabras, cómo promediando esta señal de pulsos de ancho fijo es posible obtener a la salida del detector la señal demodulada buscada. Puede resultar útil dibujar algún ejemplo de una señal modulada en FM y la salida correspondiente.

La voz se transmitía modulada en FM a la nave espacial, en una subportadora de 30kHz. Considerando una señal de audio de ancho de banda $W = 4$ kHz y potencia $S_x = 0.5$, y una desviación máxima en frecuencia $f_\Delta = 7.5$ kHz.

- (b) Usando la regla de Carson, ¿cuál sería el ancho de banda estimado para la señal modulada en FM?

En caso de un mal funcionamiento, la comunicación de voz de respaldo podría transmitirse a la nave espacial a través de la subportadora de 70kHz (usada normalmente para datos).

- (c) ¿Cuál sería el ancho de banda estimado para la señal modulada en FM en este caso?

Las comunicaciones entre el Apolo 11 y Tierra era en la denominada Unified S-Band (USB¹), en frecuencias cercanas a los 2.2GHz. La señales de voz, datos, TV, se combinaban usando modulación en fase (PM), debido a que mantiene la frecuencia bastante constante, lo que permitía medir la velocidad de la nave. A continuación haremos un cálculo simplificado del enlace entre la Tierra y la Luna (384400 km), asumiendo una modulación FM con los parámetros indicados previamente ($f_\Delta = 7.5$ kHz y mensaje de audio de ancho de banda $W = 4$ kHz y potencia $S_x = 0.5$). Como modelo de canal se utiliza la atenuación en espacio libre de Friis² y un ruido AWGN con DEP $\eta/2$, siendo $\eta = 10^{-15}$ W/Hz. El requerimiento definido por la NASA era que como máximo el 10% de las palabras tuvieran distorsión. Para lograr esto fue necesario instalar antenas gigantes de 85 pies ubicadas en distintas partes del mundo. Por lo tanto, una parte de la atenuación por la distancia era compensada por dichas antenas, lo cual estimaremos en 50dB de ganancia. Si el requerimiento de la NASA se traduce en una mínima $SNR_D = 5$ dB:

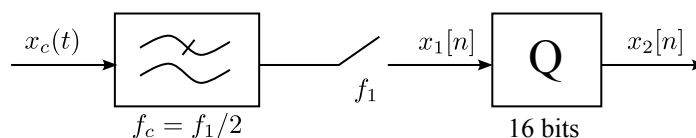
- (d) ¿Cuál es la mínima potencia de transmisión S_T necesaria para cumplir dicho requerimiento?
- (e) ¿Cómo cambia el resultado para el caso en que la nave está en el espacio a 200km de la Tierra?

Problema 2

Se considera un proceso estacionario en sentido amplio $x_c(t)$ con densidad espectral de potencia:

$$S_{x_c}(f) = 0,1 [1 + \cos(2\pi f/f_1)] \Pi\left(\frac{f}{f_1}\right)$$

Se decide muestrear el proceso x_c con una frecuencia de muestreo $f_s = f_1$ obteniendo $x_1[n]$ según se muestra en la figura.



- (a) Hallar la densidad espectral de potencia del proceso $x_1[n]$ que resulta del muestreo.
- (b) Hallar la autocorrelación del proceso $x_1[n]$.

¹No confundir con el más popular actualmente *Universal Serial Bus*.

²Atenuación en espacio libre de Friis: $L(d) = (4\pi f_c d/c)^2$ siendo $c = 3 \times 10^8$ m/s

(c) Hallar la potencia del proceso $x_1[n]$.

La señal se asume que varía un rango de valores entre -1 y 1 es cuantizada con un cuantizador de 16 bits.

(d) Indicar el modelo de error de cuantización. Hallar su autocorrelación y su densidad espectral de potencia.

(e) Hallar la SNR luego de la cuantización.

Se desea mejorar la SNR, por lo que se sobremuestra al doble de la frecuencia utilizada ($2f_1$).

(f) Dar un diagrama de bloques del sistema que realice esta mejora.

(g) Calcular la nueva SNR.

Solución

Pregunta

- (a) El proceso es estacionario por lo que la autocorrelación dependerá de la diferencia n .

$$R_x[n] = A^2(1 - (2p - 1)^2)\delta[n] + A^2(2p - 1)^2$$

- (b) La señal PAM se puede escribir como

$$Y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k p(t - kT - t_d)$$

De acuerdo a lo visto en el teórico la densidad espectral de potencia de esta PAM es:

$$S_Y f = \frac{|P(f)|^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k] e^{j2\pi kT}$$

$$S_Y f = \frac{A^2(1 - (2p - 1)^2)}{T} |P(f)|^2 + \frac{A^2(2p - 1)^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| P\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

En el caso $p(t) = p_1(t)$, $|P_1(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2(fT)$.

En el caso $p(t) = p_2(t)$, $|P_2(f)|^2 = \frac{T^2}{2} (\text{sinc}^2(fT/2)e^{-jfT/4} - \text{sinc}^2(fT/2)e^{jfT/4})$.

Notar que el ancho de banda de $p_2(t)$ es aproximadamente el doble que el ancho de banda de p_1 . También notar que $P_1(0) = T^2$ y $P_1(0) = 0$.

- (c) En el caso que $p = 1/2$, la densidad espectral de potencia de la PAM no tiene una componente de continua, por lo que ambas opciones p_1 o p_2 podrían ser utilizadas. En este caso el ancho de banda utilizado por p_2 es aproximadamente el doble que el obtenido por p_1 por lo que lo más razonable sería utilizar p_1 ya que permitiría una tasa de símbolos mayor a igual ancho de banda.

- (d) En este caso la PAM correspondiente a p_1 tiene una componente en continua, pero el canal tiene ganancia cero en continua por lo que se recibirá algo muy diferente a lo transmitido.

En el caso de p_2 cada pulso tiene media nula por lo que sin importar la probabilidad de cada símbolo el proceso tendrá media nula (se ve en la PAM que la transformada de Fourier del pulso conformador elimina la componente que podría aparecer en frecuencia cero). Por esto, en este caso la única opción aceptable es p_2 .

Pregunta

1. $x_{AM}(t) = A_c(1 + \mu x(t))\cos(2\pi f_c t + \theta)$.

$$S_T = A_c^2/2 + A_c^2\mu^2 S_x/4.$$

$$S_{bl} = A_c^2\mu^2 S_x/4.$$

$$S_c = A_c^2/2.$$

2. Es de esperar que en general se escuchen ambos mensajes superpuestos. Si se utiliza un detector sincrónico y ambas señales tienen diferencias de fase, el detector no podrá sincronizar su fase con ambas, por lo que según la diferencia que haya entre ellas esto podría afectar a la otra. En el caso del detector de envolvente no importa la diferencia de fase, por lo que se escucharían ambos superpuestos, siempre que ambos se reciban por encima del umbral.

Problema 1

(a) La señal de pulsos de ancho fijo corresponde a un tren de pulsos, donde habrá mayor concentración de pulsos para los tramos donde la señal modulada en FM tiene más cruces por cero y viceversa. Esto es equivalente a decir que habrá más pulsos cuando la frecuencia instantánea sea mayor y viceversa. Por lo tanto, al promediar la señal de pulsos, obtendremos una salida suave, cuyo mayor valor indicará mayor frecuencia instantánea de la señal FM y viceversa. Por lo tanto, la salida será proporcional a la frecuencia instantánea de la señal modulada en FM, por lo que será también proporcional al mensaje original que había sido modulado en FM.

(b) $B_T = 2(f_\Delta + W) = 31\text{kHz}$.

(c) El ancho de banda de la señal FM se mantiene, ya que no depende de la portadora f_c : $B_T = 2(f_\Delta + W) = 31\text{kHz}$.

(d) $L_{\text{Friis}}(d = 384400\text{km}, f = 2.2\text{GHz}) = 211\text{dB}$
 $L_{\text{efectivo}} = L_{\text{Friis}} - G_{\text{antenas}} = 161\text{dB}$

Por un lado se debe cumplir la SNR_D mínima:

$$SND_D = 3D^2 S_x \gamma, \text{ siendo } \gamma = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} W$$
$$\rightarrow S_T = \eta L_{\text{efectivo}} W SND_D / 3D^2 S_x$$

Por otro lado se debe verificar la condición de umbral:

$$SNR_R = S_R / N_R = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} B_T > 10$$
$$\rightarrow S_T = 10 \eta L_{\text{efectivo}} B_T$$

De la condición más restrictiva se obtiene el valor de S_T mínimo necesario.

(e) Repetimos el proceso de la parte anterior pero con los nuevos valores:

$$L_{\text{Friis}}(d = 200\text{km}, f = 2.2\text{GHz}) = 145\text{dB}$$
$$L_{\text{efectivo}} = L_{\text{Friis}} - G_{\text{antenas}} = 95\text{dB}$$

$$SND_D = 3D^2 S_x \gamma, \text{ siendo } \gamma = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} W$$
$$\rightarrow S_T = \eta L_{\text{efectivo}} W SND_D / 3D^2 S_x$$

$$SNR_R = S_R / N_R = S_T / \eta L_{\text{efectivo}} B_T > 10$$
$$\rightarrow S_T = 10 \eta L_{\text{efectivo}} B_T$$

De la condición más restrictiva se obtiene el valor de S_T mínimo necesario.

Problema 2

(a) El filtro pasabajos a la entrada no tiene efecto sobre el proceso ya que es de banda limitada $f_1/2$. Al tomar el proceso muestreado, se obtiene que la autocorrelación es el muestreo de la autocorrelación del proceso en tiempo discreto y en el dominio de frecuencia, la densidad espectral de potencia corresponde al escalado y periodización de la densidad espectral de potencia en tiempo continuo. Se tiene entonces que:

$$S_{x1}(e^{j2\pi f/f_1}) = 0,1 f_1 (1 + \cos(2\pi f/f_1))$$

(b) La autocorrelación se obtiene antitransformando la densidad espectral de potencia.

$$R_{x1}[k] = 0,1 \times (\delta[k] + 0,5\delta[k-1] + 0,5\delta[k+1])$$

(c) Hay varias formas de calcular la potencia, la más sencilla en este caso es evaluar la autocorrelación en $k = 0$.

$$R_{x1}[0] = 0,1$$

(d) El modelo corresponde a considerar la cuantización como ruido blanco aditivo no correlacionado con la señal.

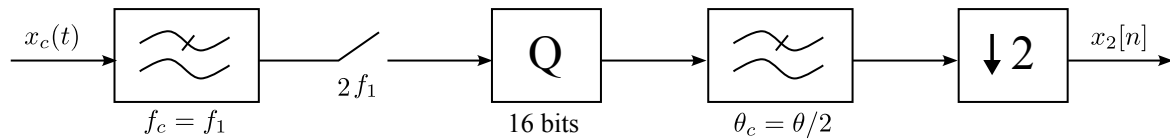
Considerando que el paso de cuantización es $\Delta = \frac{2}{2^{16}}$, la autocorrelación es entonces:

$$R_q[k] = \delta[k]\Delta^2/12$$

(e) Tenemos entonces que la SNR es:

$$SNR_1 = 0,1/(\Delta^2/12)$$

(f)



(g) En este caso es sencillo ver que la mitad de la potencia del ruido de cuantización es eliminada por lo que la nueva SNR es el doble de SNR_1 .